

Il mistero del cosmo è scritto nel linguaggio della matematica, e le equazioni sono le frasi che ne esprimono la bellezza e la profondità. Cercare di spiegare la scienza senza equazioni è come cercare di spiegare l'arte senza illustrazioni: partendo da questo presupposto, Sander Bais presenta una galleria delle principali equazioni della fisica, vere icone della conoscenza in cui sono racchiuse le leggi fondamentali della natura. Delle diciassette equazioni prescelte, Bais racconta il percorso scientifico, storico e umano che ha portato alla loro genesi. Di ognuna di esse viene sottolineato il ruolo svolto nel plasmare la nostra comprensione della realtà fisica, nei suoi molteplici aspetti: dalla meccanica all'elettrodinamica, dalla fluidodinamica alla relatività e alla fisica quantistica. Dopo una breve introduzione dedicata al vocabolario del linguaggio delle equazioni, costituito da concetti matematici e dai simboli che li rappresentano, il lettore può decidere liberamente il proprio percorso: le chiavi di lettura, infatti, possono essere diverse, così come i legami tra le equazioni. Il risultato, nelle parole dell'autore, è un volo che ci permette di contemplare la bellezza di un paesaggio montuoso senza dover faticare sui sentieri accidentati che conducono alle vette. Ascoltiamo la natura che ci parla nella sua lingua.

Sander Bais insegna all'Università di Amsterdam, dove ha diretto a lungo l'Istituto di Fisica teorica. Dopo gli studi in Olanda e negli Stati Uniti, la sua attività di ricerca si è concentrata per molto tempo sulla fisica delle particelle, la teoria dei campi, la relatività e la teoria delle stringhe. Per i nostri tipi è già apparso *Relatività. Guida illustrata molto speciale* (2008).

ISBN 978-88-220-4167-8

€ 16,00 (i.i.)



9 788822 041678

Sander Bais

EQUAZIONI



Sander Bais

EQUAZIONI

Le icone del sapere

edizioni Dedalo

Biblioteche
di Roma

530.

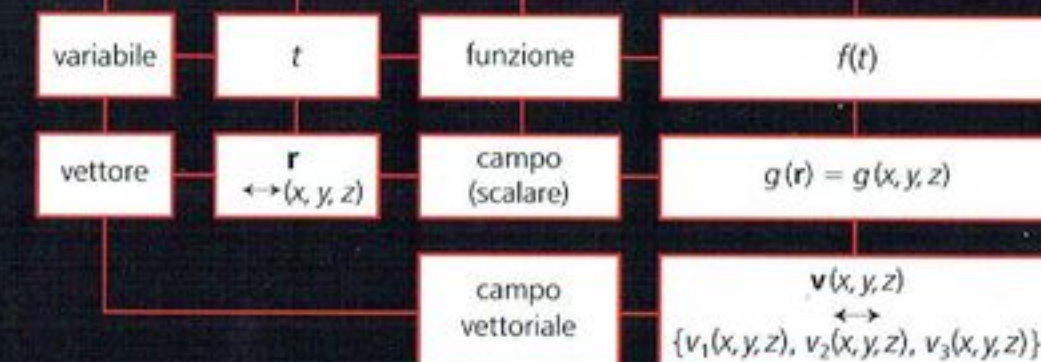
15

BAI

Valori di alcune costanti universali della natura

Costante gravitazionale di Newton	G_N	$= 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$
Costante di Boltzmann	k_B	$= 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Numero di Avogadro	N_A	$= 6,022 \times 10^{23} \text{ /mole}$
Velocità della luce	c	$= 299\,792\,458 \text{ m/s}$
Costante di Planck	h	$= 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}$
Carica dell'elettrone	e	$= 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa dell'elettrone	m_e	$= 9,110 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Massa del protone	m_p	$= 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Massa della particella W	m_W	$= 1,433 \times 10^{-25} \text{ kg}$
Costante cosmologica	Λ	$= 0,7 \times 10^{-26} \text{ kg/m}^3$

Variabili e funzioni



Moltiplicazioni



Operatori differenziali applicabili alle funzioni e ai campi



Ringraziamenti

L'autore desidera ringraziare i suoi colleghi dell'Istituto di Fisica Teorica di Amsterdam, e in particolar modo il Dr. Leendert Suttorp, per i commenti e i suggerimenti costruttivi. Una parte del libro è stata realizzata al Santa Fe Institute, che si ringrazia con tutto il cuore per l'ospitalità e l'atmosfera stimolante. L'autore è anche in debito nei confronti delle persone dell'AUP che hanno collaborato al progetto, in particolare Vanessa Nijweide, per i consigli, l'entusiasmo e la pazienza.

Le informazioni biografiche provengono da varie fonti, tra cui:

Concise Dictionary of Scientific Biography, Charles Scribner's Sons, New York 1981.

The MacTutor History of Mathematics archive:
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history

www.nobel.org

www.scienceworld.wolfram.com

© Amsterdam University Press, 2005

Titolo originale
The equations. Icons of knowledge

Progetto grafico originale
Gijs Mathijs Ontwerpers, Amsterdam

Traduzione di Andrea Migliori
Editing scientifico di Elena Ioli

© 2009 Edizioni Dedalo srl
Viale Luigi Jacobini 5, 70123 Bari
www.edizionidedalo.it

Tutti i diritti sono riservati.
Riproduzione vietata ai sensi di legge
(art. 171 della legge 22 aprile 1941, n. 633)

Volume di pagine 96
carta Woodstock grigio, gr. 140
Finito di stampare nel novembre 2009
dalla Dedalo Litostampa srl, Bari

Indice

- 6 Introduzione
- 11 Una scatola degli attrezzi tautologica
- 18 Ascesa e declino L'equazione logistica
- 22 La meccanica e la gravità
Le equazioni della dinamica di Newton e la legge universale della gravitazione
- 28 La forza elettromagnetica La legge di Lorentz
- 32 Una legge di conservazione locale L'equazione di continuità
- 34 L'elettrodinamica Le equazioni di Maxwell
- 40 Le onde elettromagnetiche Le equazioni d'onda
- 42 Onde solitarie L'equazione di Korteweg-De Vries
- 44 La termodinamica I tre principi della termodinamica
- 50 La teoria cinetica L'equazione di Boltzmann
- 54 La fluidodinamica Le equazioni di Navier-Stokes
- 58 La relatività ristretta La cinematica relativistica
- 64 La relatività generale Le equazioni di Einstein
- 70 La meccanica quantistica L'equazione di Schrödinger
- 76 L'elettrone relativistico L'equazione di Dirac
- 80 L'interazione forte La cromodinamica quantistica
- 84 Le interazioni elettrodeboli
Il modello di Glashow-Weinberg-Salam
- 88 La teoria delle stringhe L'azione della superstringa
- 93 Ritorno al futuro Una prospettiva finale

La matematica come linguaggio della natura

Questo libro parla delle equazioni fondamentali delle scienze fisiche come frutto e fonte di ispirazione del desiderio umano di capire l'Universo. Le equazioni sono affermazioni concise sul funzionamento della natura, espresse in linguaggio matematico. In quanto tali, le equazioni di cui parleremo non possono essere ottenute attraverso l'uso esclusivo del ragionamento logico, ma nascono da un dialogo critico tra l'osservazione della natura e l'intuito e il ragionamento creativo di alcune grandi menti.

L'obiettivo di questo libro, tuttavia, non è quello di insegnare la matematica o la fisica in modo rigoroso. Le equazioni sono illustrate nel modo più semplice possibile, limitando al massimo i commenti sui dati empirici che le giustificano – nonostante la loro esistenza ci sia stata svelata innanzitutto da un'osservazione attenta e critica delle strutture e dei movimenti naturali. Questo libro rappresenta un tentativo di comunicare l'emozione e la bellezza di quello che le equazioni ci dicono. I fisici usano la matematica come linguaggio della natura, un linguaggio che è stato necessario arricchire ogni volta che si è scoperto un nuovo livello di realtà fisica. Chi studia la natura, infatti, tende a usare la matematica come un linguaggio, mentre il matematico la studia per il piacere di farlo.

Esprimere correlazioni correlando espressioni

La parola «equazione» deriva dal latino *aequare*, che a sua volta deriva dalla parola *aequus*, che vuol dire uguale, o equivalente. Le equazioni possono limitarsi ad assegnare un valore a una variabile, ma in generale, nel contesto che esamineremo, esprimono delle relazioni tra variabili fisiche che caratterizzano il sistema fisico che stiamo esaminando, determinando fino a che punto queste variabili possono cambiare nello spazio e nel tempo. Le relazioni sono espresse in ter-

Introduzione

Un dogma di moda

La divulgazione scientifica è afflitta da un dogma particolarmente di moda, in base al quale l'uso delle equazioni in un testo scientifico indirizzato al grande pubblico è vietato. C'è chi odia le equazioni e chi le ama. Un simile divieto equivale a chiedere a una persona di spiegare l'arte senza mostrare le immagini. In questo libro non terremo conto del divieto e in sostanza lo aggireremo; una volta tanto, l'attenzione si concentrerà proprio sulle equazioni. E dato che parleremo delle equazioni come icone della conoscenza, dovremo certamente mostrarle in tutta la loro bellezza.

«Law and order»

L'Universo è estremamente ordinato, a ogni ordine di grandezza. Su grande scala, possiamo pensare ai sistemi planetari che orbitano intorno a una stella come il nostro Sole, alle stelle che si radunano a formare le galassie, o ancora alle galassie che formano gli ammassi e i superammassi. Nel mondo dell'infinitamente piccolo, possiamo pensare agli atomi, ai nuclei e ai componenti più elementari della materia: i quark, gli elettroni, i fotoni. Tra le due realtà troviamo un'immensa diversità di strutture complesse, costituite da stati condensati della materia: fluidi, cristalli e mucchi di sabbia, per non parlare della struttura misteriosa delle molecole della vita, come il DNA e le proteine. In realtà, i sistemi che potrebbero interessarci sono di vario tipo. Al loro interno potremmo anche trovare la dinamica delle popolazioni, i mercati finanziari, i processi di apprendimento, le epidemie, o persino l'Universo nel suo insieme.

mini matematici attraverso simboli relazionali, come il segno di «uguale» (=) e i simboli di «maggiore» (>) e «minore» (<). Perciò si può parlare di equazioni o di disuguaglianze, a seconda dei simboli relazionali che compaiono.

Nella scienza ci sono molte equazioni, ognuna con una sua importanza. Le equazioni fondamentali sulle quali ci concentreremo corrispondono a cambiamenti radicali della nostra conoscenza: sono i nodi fondamentali di una rete complessa di idee immersa in uno spazio di fatti osservabili.

Equazioni semplici e soluzioni complesse

Quando vogliamo studiare un sistema, o una struttura, siamo soliti darne una rappresentazione codificata da un insieme di variabili: posizione, velocità, densità di popolazione, temperatura e così via. In seguito, ci mettiamo in cerca delle relazioni che legano tali variabili strutturali, ottenendo delle equazioni che possono anche essere piuttosto complicate. Le variabili sono le incognite, le quantità rispetto alle quali vogliamo risolvere le equazioni.

La natura si è data un'organizzazione le cui forme mostrano una stabilità strutturale, una diversità e una complessità stupefacenti a ogni ordine di grandezza.

Una legge semplice può descrivere benissimo una struttura complessa: il miracolo non è tanto la complessità del nostro mondo, quanto la semplicità delle equazioni che la descrivono.

Il nostro obiettivo è duplice: da un lato, trovare le equazioni che governano la struttura e il comportamento dinamico di un sistema; dall'altro, capire i principi espressi da tali equazioni e trovarne le soluzioni. Per trovare le equazioni occorre conoscere il sistema che si vuole tradurre in un modello, e questo è un compito che tocca anzitutto a chi studia le scienze naturali; per costruire le equazioni, in-

vece, il matematico è un compagno di cui non si può fare a meno. Oltre agli stati stazionari (una molecola, un cristallo), le equazioni descrivono anche processi dinamici, come la diffusione di particelle, o l'evoluzione temporale del sistema che stiamo studiando, qualunque esso sia: il clima, la corrente di un fiume, la crescita di popolazioni batteriche in competizione tra loro o l'espansione dell'Universo. Spesso le equazioni hanno un potere predittivo: nuove soluzioni hanno aperto la strada a nuove scoperte sperimentali.

Variabili e costanti

Oltre alle incognite (le variabili), solitamente le equazioni contengono uno o più parametri di controllo. Si tratta di costanti: cambiandone il valore, si possono influenzare in maniera drastica le proprietà delle soluzioni ottenute. L'acqua può ghiacciare o evaporare, a seconda del valore della temperatura come parametro. Un'orbita chiusa può diventare aperta, a seconda dell'intensità della forza attrattiva.

Nelle equazioni fondamentali che esamineremo nel corso di questo libro, compaiono alcune costanti universali, indicate spesso come «costanti fondamentali della natura»: la costante gravitazionale di Newton, che definisce l'intensità della forza di gravità; la velocità della luce, o la costante di Planck. Nel risvolto di copertina troverete una tabella con i valori delle costanti fondamentali più importanti. Si tratta di numeri la cui importanza è cruciale per fissare la scala delle entità di cui è composto il nostro Universo. Se prendessimo le stesse equazioni, ma cambiassimo i valori di queste costanti di natura, la natura stessa sarebbe indubbiamente molto diversa. L'Universo potrebbe anche risultare inabitabile, e forse non saremmo nemmeno qui a discuterne. Ciò che ancora non sappiamo è *perché* i valori sono quelli che sono.

A volo d'uccello

Il contenuto di questo libro è come un paesaggio, le cui montagne sono le equazioni. Ci sono montagne difficili da scalare, ma che offrono, una volta raggiunta la cima, una vista spettacolare. La strada che seguiremo noi sarà quella più facile. Sorvoleremo il paesaggio, e di tanto in tanto poseremo lo sguardo sui picchi più alti, senza preoccuparci di quanto possa essere difficile, giù a terra, muoversi da un posto all'altro. Volemo troppo in alto per vedere i passi più stretti, i crepacci dei ghiacciai e le pareti verticali. Per quanto potremo (parafrasando la famosa frase di Edison sul genio), salteremo il 99% di traspirazione per goderci l'1% di ispirazione. Non percorreremo i sentieri pietrosi; li vedremo come una rete finissima adagiata sul paesaggio.

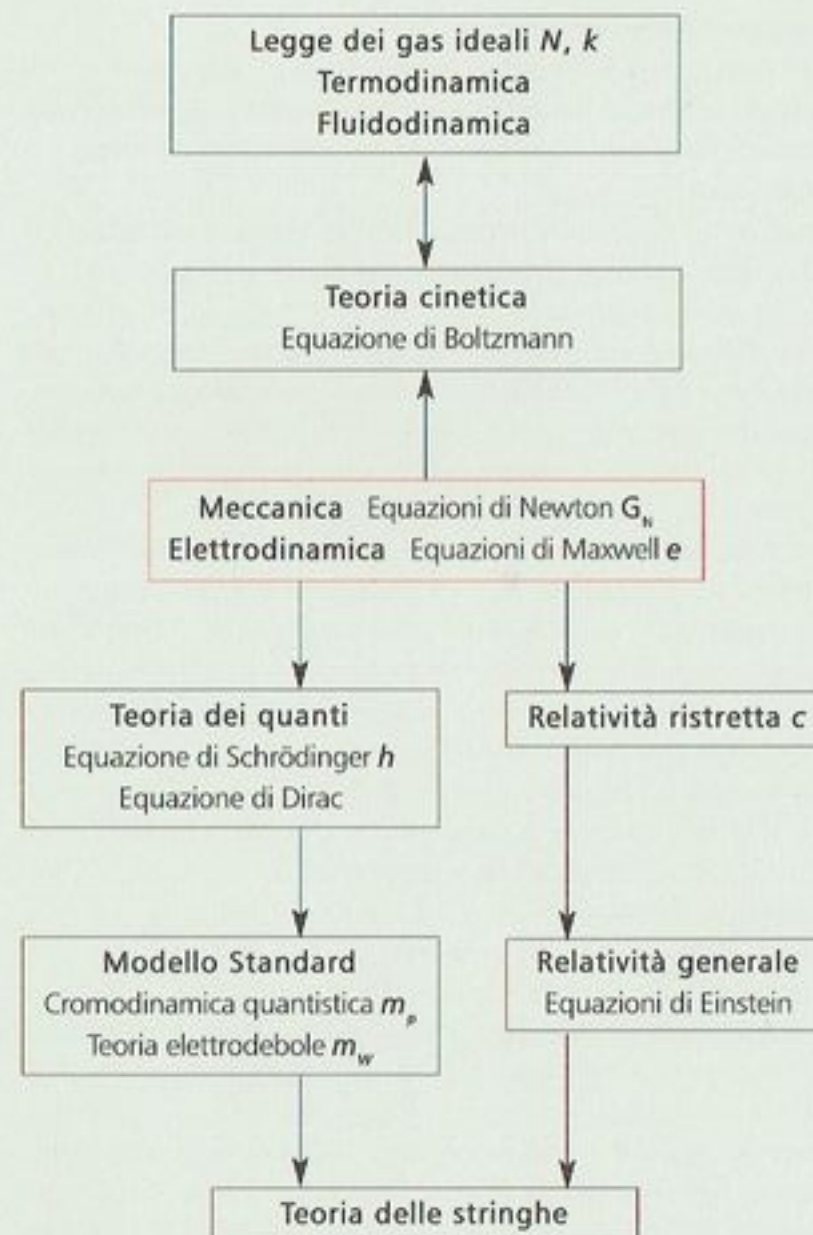
In questa panoramica dall'alto, ci saranno cose che non capiremo molto bene. Per qualcuno si tratterà del primo viaggio in questa terra sconosciuta. Versi di una poesia bellissima in una lingua straniera. Non è molto importante, se si torna a casa più ricchi di quando si era partiti. Ecco perché, prima di imbarcarci in questo viaggio, abbiamo deciso di darvi una mappa di ciò che troverete.

Come leggere questo libro

Il consiglio che vi do è di leggere tutta la parte introduttiva, che presenta, in ordine sparso, alcuni concetti matematici fondamentali, insieme ai simboli utilizzati per rappresentarli. Vi troverete una parte della terminologia che verrà utilizzata frequentemente nel seguito del libro; anzi, non è escluso che ogni tanto vi venga voglia di riprenderla.

I capitoli non sono numerati, a indicare che il libro non va letto necessariamente dalla prima all'ultima pagina. È una specie di esposizione di opere d'arte, in cui siete liberi di girovagare da una sala all'altra. Ogni capitolo comincia con una presentazione generale, molto sintetica (in grassetto), sul significato delle equazioni presentate. Se volete saperne di più, è opportuno che leggete anche il resto, dove troverete ulteriori spiegazioni. Se tutto ciò non vi soddisfa – un'eventualità che posso ben immaginare – allora vi consiglio di consultare qualche fonte più esauriente.

Un'ultima cosa: le nostre equazioni si conoscono a vicenda. Si abbracciano, camminano mano nella mano, o si scontrano, a volte in maniera plateale, a volte di nascosto. Può capitare che dallo scontro tra due equazioni ne nasca una terza. Spesso ci imbattiamo in quelle che sembrano contraddizioni, risolvibili solo attraverso l'introduzione di un nuovo concetto unificante – la crisi come momento creativo. Le equazioni ci raccontano l'evoluzione dei paradigmi nella scienza.

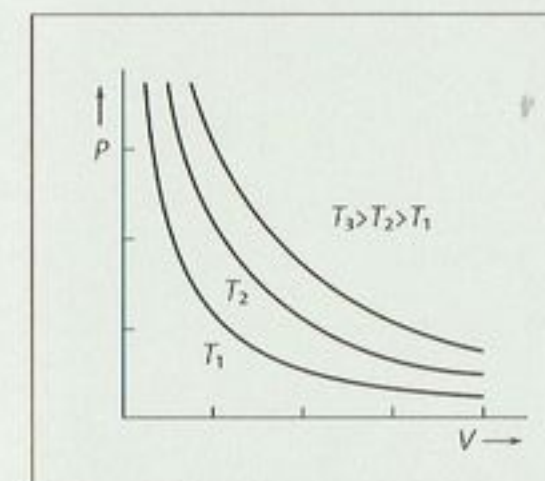


La mappa dei contenuti

Nella mappa dei contenuti abbiamo indicato alcune delle relazioni più ovvie tra gli argomenti. La maggior parte delle frecce indica l'ordine cronologico delle scoperte. Il libro partirà da metà, per dirigersi verso l'alto, nel mondo macroscopico dei materiali composti da un grandissimo numero di atomi. Poi torneremo giù, seguendo le strade indicate dalla relatività e dai quanti.

In definitiva, possiamo anche immaginare che la mappa abbia tutte le frecce dirette verso l'alto, poiché ciò rifletterebbe la gerarchia strutturale immanente nel nostro mondo, senza contare che fu proprio quella la direzione seguita dalla natura nei suoi 13,7 miliardi di anni di evoluzione, dal Big Bang a oggi. È proprio questa prospettiva così allargata, ben più vasta di quella puramente terrestre di Darwin, che dimostra l'irragionevolezza del successo del riduzionismo nella scienza. Il fatto che la natura stia imparando a capire le radici più profonde delle proprie origini potrebbe voler dire che stiamo per varcare una soglia evolutiva di importanza fondamentale.

Una scatola degli attrezzi tautologica



$$PV = RT$$

La costante dei gas R è data da $R = Nk$, dove N è il numero di Avogadro, che ci dice di quante molecole stiamo parlando. La costante di Boltzmann, k , è una costante fondamentale che lega la temperatura all'energia.

Una gerarchia matematica

Nella struttura delle equazioni esiste una certa gerarchia. Il loro livello di complessità matematica dipende da cosa si vuole descrivere. Alle superiori, molti di noi hanno avuto a che fare con equazioni di qualche tipo.

Le equazioni più semplici sono quelle che contengono solo operazioni algebriche: addizioni, sottrazioni, e così via.

Un'equazione algebrica semplice ma con un ruolo importante nella fisica è l'equazione di stato di un gas ideale. Rappresentata solitamente nella forma $PV = RT$, esprime la relazione fenomenologica tra la pressione P di una certa massa di gas, il suo volume V , la sua temperatura T e la costante fondamentale dei gas, che è semplicemente un numero di cui si conosce il valore.

Un'equazione del genere, che può essere utilizzata in molti modi, afferma che le tre variabili P , V e T che caratterizzano lo stato di una certa quantità di gas non sono indipendenti, perché devono soddisfare la relazione in questione. Un'applicazione ovvia dell'equazione consiste nel calcolare il valore di una variabile a partire dai valori effettivi delle altre due. A livello qualitativo, però, la relazione ci dice molto di più (si veda la figura a fianco). Se ne può dedurre, ad esempio, che se si aumenta la pressione P mantenendo costante il volume, dovrà aumentare anche la temperatura. Analogamente, si può concludere che se si diminuisce il volume mantenendo costante la temperatura, saremo vincolati a muoverci su una delle curve rappresentate nella figura, facendo aumentare la pressione.

È possibile che un'equazione simile vi sia più familiare in una delle forme, diverse ma equivalenti, in cui può essere riscritta seguendo questa ricetta: «Qualsiasi cosa facciate al primo membro, dovete farlo anche al secondo». Perciò, se sottraiamo RT da ambo i membri, possiamo scrivere $PV - RT = 0$; dividendo ambo i membri per T , invece, otteniamo $PV/T = R$. Possiamo trovare più utile una forma o l'altra, a se-

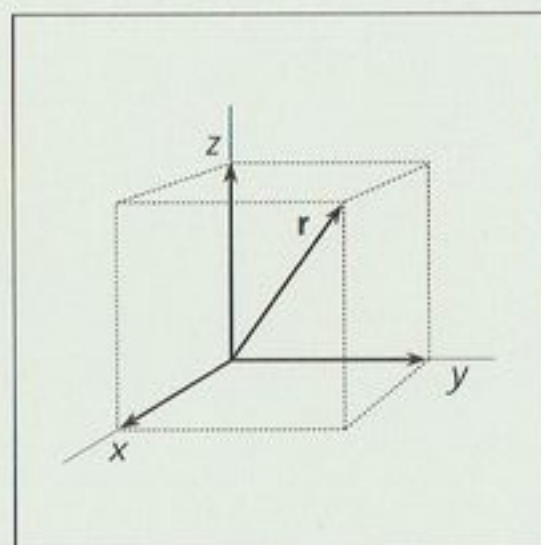
conda della domanda cui vogliamo rispondere. L'aspetto dell'equazione può essere molto diverso, ma il messaggio resta lo stesso. La maggior parte delle equazioni che prenderemo in esame non sono semplici equazioni algebriche come questa, ma si servono di concetti più sofisticati, come quello di *derivata*. Perciò, prima di affrontare la storia delle equazioni fondamentali, sarà meglio presentare i simboli matematici che compaiono più di frequente e spiegarne il significato.

Il linguaggio delle quantità: variabili, funzioni e campi

Adesso occupiamoci di alcuni dei concetti e dei simboli matematici utilizzati abitualmente dagli scienziati. È consuetudine indicare le quantità con delle lettere – T per la temperatura, t per il tempo, r per la posizione, eccetera. Queste quantità possono assumere valori diversi, e quindi sono dette *variabili*. Nelle equazioni compaiono anche delle costanti: da un lato ci sono le *costanti universali*, come la velocità della luce c , o la carica dell'elettrone e ; dall'altro, ci sono *parametri* che assumono valori numerici specifici a seconda del contesto. Ne è un esempio la viscosità η , la quale, naturalmente, dipende dal mezzo che state studiando: lo sciroppo è molto più viscoso dell'acqua. Invece di scrivere i valori numerici dei parametri, indichiamo anche loro con delle lettere. Le nostre equazioni, dunque, contengono diverse famiglie di lettere: le variabili, le costanti universali e i parametri.

Adesso arricchiamo il concetto di variabile con qualche nuova proprietà. Una variabile può dipendere da un'altra, nel qual caso parliamo di *funzione* o di *campo*. La temperatura in una stanza, ad esempio, può dipendere dalla posizione e dal tempo. Per esprimere una relazione del genere scriviamo $T(r, t)$: significa che pensiamo alla temperatura come a una funzione dello spazio e del tempo. Una funzione come T racchiude un sacco di informazioni, poiché potete conoscerla perfettamente solo comprendendone il valore in tutti i punti dello spazio e in ogni momento.

12



Inversioni

Quando definiamo un operatore matematico, conviene sempre chiedersi quale sia l'operazione inversa. Le operazioni hanno la tendenza a manifestarsi in coppie i cui elementi si neutralizzano a vicenda. Alcune importanti scoperte in campo matematico sono state fatte grazie alla definizione dell'inversione più appropriata.

Giocando con le biglie si impara a contare, a sommare gli interi positivi. Se in una partita si perde, si scopre con dolore il concetto di sottrazione, e si può anche giungere alla scoperta di un numero importantissimo, lo zero. Quando non resta più nulla, ci si può spostare su un piano più astratto e provare a sottrarre numeri ancora più grandi: così facendo, a qualcuno potrebbe venire in mente di inventare i numeri interi negativi. Analogamente, la moltiplicazione conduce alla divisione e alla scoperta dei numeri razionali. Dalle radici dei numeri positivi si arriva all'insieme continuo dei numeri reali, mentre le radici dei numeri negativi portano a introdurre l'insieme dei numeri complessi. Talvolta, piccole domande portano a grandi risposte.

Per rendere la vita ancora più complicata, le variabili e le funzioni possono avere più *componenti*: possono essere, cioè, un insieme di cose. Le singole componenti sono identificate da un indice (di solito, come apice o come pedice) che specifica a quale elemento dell'insieme ci si sta riferendo. In tre dimensioni, ad esempio, la posizione r ha tre componenti: $r_1 = x$, $r_2 = y$, $r_3 = z$. La loro combinazione r è detta *vettore*. Per convenzione, le variabili o le funzioni dotate di componenti si stampano in grassetto. La lettera in grassetto è come il cognome di una famiglia, mentre le componenti caratterizzate da un indice sono come i membri della famiglia identificati dalle iniziali.

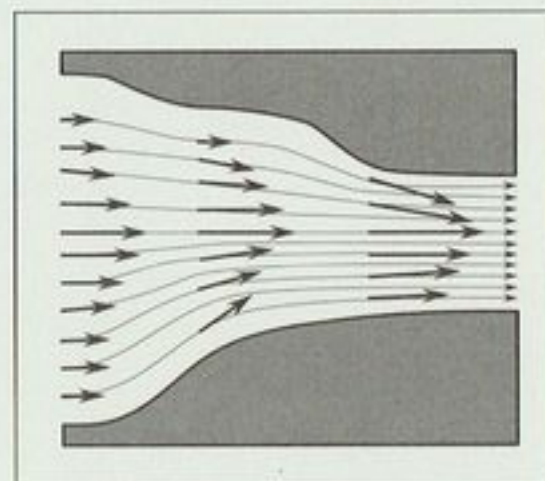
La parola *componente* indica la presenza di un sistema di riferimento, che per noi, nella maggior parte dei casi, sarà costituito da un sistema di coordinate cartesiane. In parole povere, se vogliamo specificare dove siamo – ad esempio, a Manhattan, in un ufficio – dobbiamo specificare tre numeri: uno per la Avenue (x), uno per la Strada (y) e uno per indicare a che piano ci troviamo (z).

I vettori possono essere definiti in qualsiasi numero di dimensioni, e di solito sono caratterizzati da una lunghezza e da una direzione. Ad esempio, r può essere rappresentato da una freccia che parte da un punto di riferimento prescelto – l'*origine* – di coordinate $(0, 0, 0)$ e arriva a un punto di coordinate (x, y, z) (si veda la figura a pagina 12). Questo modo di rappresentare i vettori ci fa capire fin d'ora che uso se ne fa. Se ruotiamo un vettore, la sua direzione cambia, ma la sua lunghezza resta la stessa. A questi insiemi di variabili vengono dati nomi fantasiosi: vettori, tensori, multipletti, spinori, e così via, che fanno riferimento alle loro proprietà particolari, ad esempio il comportamento rispetto a determinate operazioni, come la rotazione. Infine, possiamo combinare le nozioni presentate in precedenza e aggiungere un ulteriore livello di complessità. Ad esempio, possiamo considerare una funzione, o un campo, con delle componenti, come il «campo della velocità» dell'acqua in un fiume, $v(x, y, z, t)$: si tratta di

13

un campo di vettori che descrive l'andamento delle componenti del vettore velocità $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ in funzione del tempo, ovvero $v_i = v_i(x, y, z, t)$, eccetera. In alternativa, possiamo pensare a tale campo vettoriale come a una mappa in cui a ogni punto dello spazio-tempo (x, y, z, t) è assegnato un vettore $\mathbf{v}$.

Per riuscire a immaginarsi un campo vettoriale può essere utile pensare al flusso di un corso d'acqua: in ogni suo punto c'è un vettore che ci dà la velocità dell'acqua nel punto in questione. Le particelle d'acqua scorrono lungo linee di flusso ben precise che non possono intersecarsi. Per rappresentare il campo delle velocità in un certo punto si disegna una freccia tangente alla linea di flusso in quel punto, e le si associa una lunghezza proporzionale alla densità delle linee di flusso nelle immediate vicinanze. La rappresentazione classica di un campo vettoriale a un certo istante, quindi, è costituita da un insieme di linee di campo nello spazio (si veda la figura a fianco).



Il linguaggio dei cambiamenti: le derivate

Una funzione o un campo, presi a un certo istante, descrivono la situazione (cioè lo stato del sistema) in quel preciso momento. Quasi ogni cosa, però, varia a seconda della posizione e dell'istante. Spesso, le equazioni ci dicono in che modo possono evolvere certe quantità a partire da uno stato iniziale dato. Le equazioni, inoltre, specificano l'interdipendenza tra le variazioni delle variabili nello spazio e nel tempo. Le leggi di Newton, ad esempio, descrivono come variano la posizione e la velocità di una particella in presenza di una forza esterna. Ecco perché queste *equazioni dinamiche* sono dette spesso «equazioni del moto».

Un altro esempio è quello delle leggi della fluidodinamica, che descrivono come cambiano la densità, la velocità e la temperatura di un fluido al variare della posizione e del tempo, in funzione delle forze presenti nel fluido e dei valori di alcuni parametri specifici che lo ca-

ratterizzano (come la viscosità o la conducibilità termica). Quello di cui abbiamo bisogno è un linguaggio dei cambiamenti che appartiene a un ramo particolare della matematica, il *calcolo differenziale*. Si tratta di una tecnica sviluppata indipendentemente da Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz sul finire del XVII secolo, e che ha permesso di descrivere i sistemi dinamici in termini matematici precisi, aprendo la strada alla comprensione e alla predizione quantitativa dei fenomeni naturali.

I *differenziali*, come suggerisce la parola stessa, non sono altro che variazioni infinitesime. I simboli utilizzati nelle *equazioni differenziali* sono abbastanza facili da capire. Il vettore posizione $\mathbf{r}$ di una particella in movimento dipenderà dal tempo, e quindi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; la variazione infinitesima della posizione rispetto al tempo ne costituisce la *derivata temporale*, e si indica con $d\mathbf{r}/dt$. La derivata temporale, in sostanza, ci dà la variazione infinitesima della posizione $\mathbf{r}$ (indicata da $d\mathbf{r}$) per variazioni temporali infinitesime (dt). Ci dice in che modo la posizione in quel punto tende a variare – il «trend» della posizione, in pratica. Il «quoziente differenziale» $d\mathbf{r}/dt$, quindi, non è altro che la velocità della particella in un dato istante, e si misura in metri al secondo, come suggerisce la notazione.

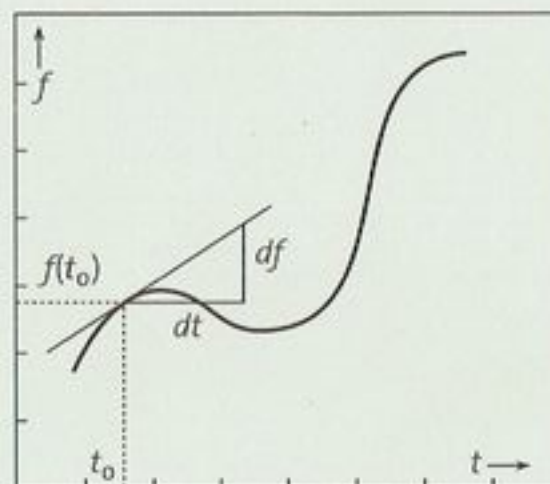
Possiamo esprimere l'accelerazione di un corpo come la derivata temporale della velocità, $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Si noti che sia la velocità che l'accelerazione sono vettori (oltre a un valore assoluto possiedono anche una direzione) e che, in generale, dipendono dal tempo. La generalizzazione alle derivate superiori è abbastanza semplice: la derivata seconda, ad esempio, non è che la derivata di una derivata. Nell'esempio che abbiamo sottomano, possiamo dire che l'accelerazione è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo, e possiamo rappresentarla semplicemente come $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$, indicando così che stiamo derivando due volte rispetto al tempo. Se la derivata a un certo istante t ci informa sul trend della funzione in prossimità di

quell'istante, la derivata seconda ci dice qualcosa sul «trend del trend». Esiste un modo semplice per visualizzare queste variazioni? Sì, se proviamo a immaginarle graficamente: ad esempio, possiamo rappresentare il moto di una particella come una curva che unisce i punti per cui passa, associando il tempo all'asse orizzontale e la distanza percorsa all'asse verticale (si veda la figura a fianco). La derivata temporale della posizione a un certo istante t_0 , in altre parole la velocità all'istante t_0 , non è altro che la pendenza della curva in quel medesimo istante. La derivata di una funzione misura la «ripidità», o «pendenza», della curva associata alla funzione, ed è una quantità che può essere positiva o negativa. Se la curva è orizzontale, come in un punto di massimo o di minimo, la velocità (e quindi la derivata della funzione) è nulla. Una derivata seconda, perciò, può essere pensata come la curvatura della curva in un punto dato. Un'accelerazione negativa (cioè una decelerazione), ad esempio, corrisponde a una linea che si incurva verso il basso.

Questa rappresentazione simbolica dei cambiamenti e delle variazioni è semplice, logica e davvero elegante; inoltre – ed è forse la cosa più importante – è estremamente utile. Come abbiamo già detto, avremo a che fare per lo più con equazioni differenziali, o, in altri termini, con equazioni in cui compaiono le derivate. Si tratta di equazioni diverse da quelle cosiddette algebriche, che molti di voi già conoscono (come l'equazione quadratica $ax^2 + bx + c = 0$, in cui il problema consiste nel trovare x dati a , b e c).

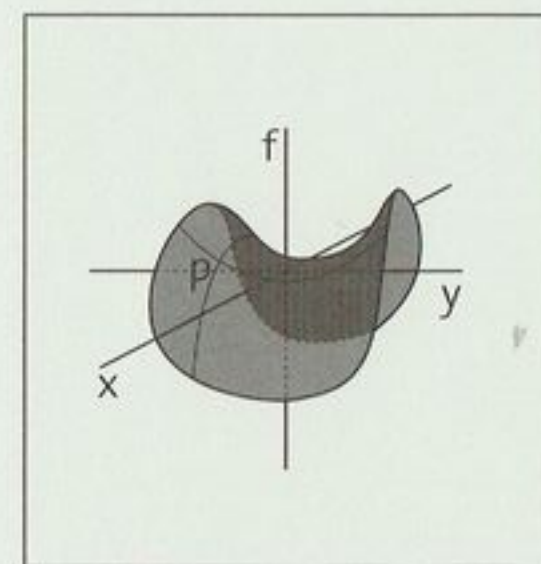
Un esempio semplice è quello della celebre formula di Newton, $F = ma$, che possiamo riscrivere come $a = F/m$. E dato che $a = dv/dt$, abbiamo anche $dv/dt = F/m$. Si tratta di un'equazione differenziale che va risolta rispetto alla velocità $v = v(t)$ in funzione della quantità F/m , la quale, a priori, può dipendere anch'essa da x e da t .

Le funzioni possono dipendere da più di una variabile: quand'è così, la variazione della funzione dipende dalla variabile rispetto alla quale la si considera. La figura nella pagina seguente illustra una funzione f di due



Il mercato dei derivati

Il concetto di quantità derivata esiste anche nel mondo della finanza, dove si riferisce a prodotti finanziari come le opzioni, i *future* e gli *swap*, la cui garanzia è rappresentata da prodotti finanziari primari (azioni, merci, cambi, eccetera). Sono una sorta di assicurazione sulle fluttuazioni imprevedibilmente ampie che minacciano gli azionisti, ma al tempo stesso, ovviamente, vengono utilizzati anche per speculare. Rispetto alle quantità derivate di cui abbiamo parlato finora, queste sono tutta un'altra cosa; l'unica cosa che hanno in comune è che entrambe hanno a che fare con i «trend».



Il simbolo nabla – una delta rovesciata – rappresenta un'antica arpa assira di forma triangolare. Il nome «nabla» fu coniato da Tait, che a tale proposito diede vita a una disputa scherzosa con Maxwell. Quest'ultimo avrebbe preferito il nome «pendenza».

variabili, x e y . È evidente che in un qualsiasi punto P della superficie, la pendenza rispetto alla direzione x può essere diversa da quella rispetto alla direzione y . Un esempio di una funzione del genere è la temperatura, che può variare con continuità da un posto all'altro e da un istante all'altro. Da tutto ciò deriva la necessità di introdurre, oltre alla derivata temporale, anche le derivate spaziali d/dx , d/dy e d/dz – e, nel caso in cui le dipendenze possibili siano molteplici, le derivate parziali $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$. Queste tre derivate spaziali (che danno la pendenza di una funzione in tre direzioni distinte) possono essere raggruppate in un vettore, rappresentato dal simbolo ∇ , il cosiddetto operatore nabla, o *del*. Il nabla riunisce le pendenze nelle varie direzioni. Più precisamente, applicandolo a una funzione $f(x, y, z)$ si ottiene un campo vettoriale $\mathbf{g}(x, y, z)$ con componenti $g_1 = \partial f/\partial x$, $g_2 = \partial f/\partial y$ e $g_3 = \partial f/\partial z$.

Sommare le differenze: l'integrazione

Per risolvere un'equazione differenziale, dobbiamo sapere come si fa il contrario della derivazione. Se prendiamo la derivata di una funzione e le applichiamo questa nuova operazione, ci aspetteremmo di ritornare alla funzione di partenza. Supponiamo di conoscere il valore di una funzione g in un certo istante t_0 , nonché il valore delle sue derivate in qualsiasi istante t : in tal caso possiamo risalire alla funzione attraverso la somma di tutti gli incrementi – le differenze dg . Nel linguaggio delle differenze continue, i matematici hanno definito questo concetto in maniera ben precisa, e lo hanno chiamato *integrazione*. Per lo scopo che ci siamo dati in questo libro, la definizione euristica che abbiamo appena dato è più che soddisfacente, dato che non dovremo mai integrare le equazioni in maniera esplicita.

Si conclude così il ripasso-lampo di una parte del vocabolario e dei simboli utilizzati nelle equazioni. Nella tabella sul risvolto di copertina ne troverete un'ampia sintesi.

La crescita dei gigli in uno stagno, o di una popolazione di batteri, di ratti o di persone; la diffusione di una malattia contagiosa o di una catena di Sant'Antonio ideale; sono tutti esempi di crescita esponenziale. La cosa che fa paura, della crescita esponenziale, è che i numeri diventano subito grandissimi. I processi caratterizzati da una crescita esponenziale sono destinati a esaurirsi per mancanza delle risorse che li alimentano, che si tratti di spazio, cibo o denaro. L'opposto della crescita è il decadimento. Da un punto di vista matematico, crescita e decadimento sono molto simili: basta cambiare un segno nell'equazione. Dato che la popolazione dipende solo dal tempo, questi processi sono descritti dalle *equazioni differenziali ordinarie*, che contengono una derivata rispetto a un'unica variabile – in questo caso, il tempo. Ci occuperemo innanzitutto dell'equazione semplice che descrive una crescita o un decadimento senza limiti, per poi passare all'*equazione logistica*, in cui la crescita finisce per saturare, assestandosi su un valore di equilibrio.

Nella versione più semplice di un'equazione di crescita, la variazione di una quantità $n(t)$ rispetto al tempo è proporzionale al suo valore all'istante t . Supponiamo che $n(t)$ rappresenti il numero di topi in una fabbrica di formaggio a un certo istante t . I topi hanno a disposizione una gran quantità di cibo e cominciano a moltiplicarsi come matti. Ciò significa che il tasso di riproduzione a un certo istante sarà proporzionale al numero di topi in quello stesso istante. In altre parole, la variazione di n nell'unità di tempo – ovvero la derivata temporale dn/dt – sarà proporzionale a n . Traducendo tutto questo in termini matematici, si ottiene l'equazione differenziale che potete vedere qui a lato: r è il tasso di riproduzione, detto anche tasso di crescita (malthusiana) (r è maggiore di zero).

Ascesa e declino

L'equazione logistica

$$\frac{dn}{dt} = rn$$

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

Un po' di storia

Prendendo spunto dall'opera di Malthus, nel 1838 il matematico belga Pierre Verhulst propose l'equazione logistica per descrivere la crescita limitata. Verhulst si era lanciato in politica dopo la rivoluzione belga del 1830 e la successiva invasione del suo paese da parte delle truppe olandesi, avvenuta nel 1831: il suo impegno non diede frutti, ma Verhulst continuò a occuparsi di questioni sociali come matematico e come insegnante.

Verhulst cominciò a interessarsi alla teoria delle probabilità a causa di una nuova lotteria; influenzato dalla teoria malthusiana sulla crescita delle popolazioni, però, ben presto cominciò ad applicarla all'economia politica e alle questioni demografiche. Di salute cagionevole, morì nel 1849, all'età di 45 anni.

$$\frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{k}\right)$$

La soluzione che questa equazione differenziale ci dà per $n(t)$ corrisponde a una crescita esponenziale del numero rispetto al tempo, come si può vedere a pagina 18, dove n_0 è il numero di topi all'istante zero. Il fatto che nell'esponente compaia il tempo, insieme alla costante positiva r , implica che la crescita sarà velocissima, come si può vedere dalla curva tratteggiata nella figura a pagina 21, con la sua impennata. Se per r scegliamo un valore negativo, otteniamo l'equazione di un decadimento esponenziale. Possiamo servircene, ad esempio, per descrivere il numero di nuclei radioattivi in un frammento di materiale radioattivo in funzione del tempo.

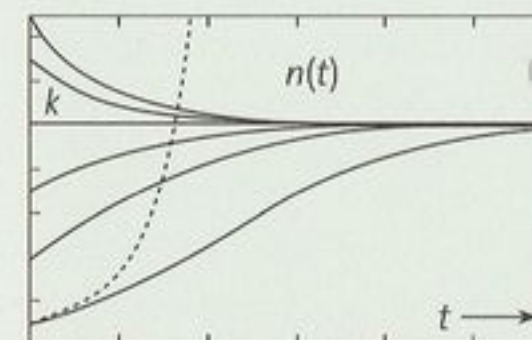
Torniamo alla popolazione dei topi: il modello appena descritto non è soddisfacente, perché ci dice solo una parte della storia. Dopo tutto, la soluzione dell'equazione suggerisce che la crescita sia illimitata, il che è poco realistico. A un certo punto i topi saranno così numerosi che la disponibilità limitata di formaggio porterà a una penuria di cibo, e il tasso di crescita, di fatto, diminuirà. Quando n raggiunge un certo valore che chiameremo k , la crescita può arrestarsi. Per tener conto di questo effetto dobbiamo cambiare l'equazione: otteniamo così la cosiddetta equazione logistica, proposta da Pierre Verhulst nel 1838.

La figura nella pagina seguente mostra l'andamento della popolazione n in funzione di t per diversi valori iniziali n_0 . Dopo un po' (= per grandi valori di t), la popolazione raggiunge il valore limite k . La ragione è che quando n si avvicina a k , l'espressione nel secondo membro dell'equazione continua a decrescere e altrettanto fa dn/dt . Vale la pena notare che se partiamo da una situazione in cui n_0 è maggiore di k , il segno del secondo membro diventa negativo, e lo stesso capita alla derivata: la conseguenza è una crescita negativa (o decadimento) fino al raggiungimento del valore di equilibrio, $n = k$.

La caduta di un impero

Si narra che un mendicante cinese, affamato, chiese umilmente all'imperatore che gli fosse dato un po' di riso secondo la «regola della scacchiera». Il primo giorno l'imperatore avrebbe messo due chicchi di riso sulla prima casella, il secondo giorno quattro chicchi sulla seconda casella, il terzo otto chicchi sulla terza casella, e così via. L'imperatore, ingenuamente, acconsentì, senza intuire che stava per mandare in rovina il suo impero. Il numero di chicchi di riso sarebbe raddoppiato ogni giorno, e dopo 64 giorni il mendicante avrebbe ricevuto $2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$ chicchi di riso: in pratica, circa mille miliardi di tonnellate di riso!

$$n(t) = \frac{k}{1 + (k/n_0 - 1)e^{-rt}}$$



La formula esatta della soluzione è visibile qui a fianco. Alcuni casi complicati di dinamica delle popolazioni, come quelli usati in ecologia, in cui si studiano, per fare un esempio, la competizione tra p specie diverse, possono essere descritti da un sistema di p equazioni accoppiate del tipo appena illustrato. Sistemi simili sono darwiniani, nel senso che possono incorporare proprietà di selezione naturale.

Il primo a prendere in esame il pericolo rappresentato dalla crescita illimitata di una popolazione fu Thomas Robert Malthus (1766-1834), noto per il pessimismo delle sue previsioni sul futuro dell'umanità. Il suo contributo più importante al pensiero economico fu il saggio *Il principio di popolazione*. Malthus lo scrisse per rispondere all'utopismo degli utilitaristi, i quali sostenevano che la crescita della popolazione fosse in ogni caso una benedizione.

In sostanza, Malthus sosteneva che la domanda di cibo avrebbe inevitabilmente superato la sua disponibilità. La sua previsione si basava sull'assunto che la popolazione cresce in maniera esponenziale al passare del tempo, mentre la produzione di cibo aumenta solo come una potenza del tempo. Non c'è da stupirsi se le idee di Malthus ebbero un'influenza notevole su Darwin e sulla sua idea di selezione naturale. Grazie ai progressi compiuti nelle tecniche di produzione e di fertilizzazione, le cose non sono andate come aveva previsto Malthus: tuttavia, il problema della crescita globale della popolazione non è stato risolto ed è tornato alla ribalta con la stessa urgenza segnalata da Malthus.

Le tre equazioni newtoniane della dinamica descrivono il moto di un corpo di massa m soggetto a una forza F e costituiscono il nucleo dell'opera più importante di Newton: i *Principia Mathematica*, in cui il moto viene definito e descritto per la prima volta in termini matematici precisi grazie all'uso delle derivate. Le equazioni di Newton furono il punto di partenza per una descrizione matematica generale dei sistemi dinamici e resero possibile la nascita e lo sviluppo della scienza quantitativa.

La quarta equazione esprime in forma esplicita la forza gravitazionale. Insieme alle altre, consentì di spiegare tutti i fenomeni gravitazionali – celesti e terrestri – noti al tempo di Newton: oltre a fornire un solido fondamento teorico alle scoperte di Copernico, Brahe, Keplero e Galileo sulle orbite ellittiche dei pianeti intorno al Sole, infatti, le equazioni di Newton spiegavano anche perché una mela cade dall'albero. Grazie a loro, sappiamo come fanno le forze a bilanciarsi per garantire la stabilità di un ponte o di un palazzo, ma anche perché, a volte, una costruzione può crollare.

In queste equazioni troviamo le derivate temporali, poiché la velocità $v = dr/dt$ è la variazione temporale della posizione, mentre l'accelerazione rappresenta la variazione temporale della velocità. La posizione, la velocità e l'accelerazione sono grandezze vettoriali: hanno un modulo e puntano in una direzione ben precisa.

La prima equazione definisce la *quantità di moto* p .

La seconda, che è anche la più famosa, definisce il moto in termini della forza applicata a un corpo. Se applichiamo una forza F , questa provoca un'accelerazione nella stessa direzione della forza. In particolare, l'equazione implica che, in assenza di forze, la velocità non cambia e la quantità di moto resta costante. Agli albori della mec-

La meccanica e la gravità

Le equazioni della dinamica di Newton e la legge universale della gravitazione

Isaac Newton

Isaac Newton nacque nel giorno di Natale del 1642 a Woolsthorpe, in Inghilterra, in una piccola residenza di campagna. All'età di 12 anni fu mandato alla King's School di Grantham, dove non diede dimostrazioni di particolare genialità. Nel 1660 andò via di casa per preparare l'ammissione a Cambridge e l'anno successivo fu ammesso al Trinity College. Otto anni dopo era già titolare della Cattedra Lucasiana di Matematica. Ci vollero altri 15 anni prima che cominciasse a scrivere la sua opera più importante, i *Principia Mathematica*, un trattato che cambiò per sempre il concetto di scienza e che rappresenta la massima espressione del genio di Newton.

Le idee di Newton furono accolte con entusiasmo, ma fu solo dopo la sua morte che vennero definitivamente assimilate e insegnate nelle università. Nel 1699 Newton fu chiamato a Londra per assumere l'incarico di direttore della Zecca Reale. Scienziato, amministratore, mistico e teologo – alla teologia dedicò migliaia di pagine –, Newton morì nel 1727 nella sua residenza di Kensington. Fu sepolto nell'abbazia di Westminster.

$$p = m v$$

$$F = m a$$

$$F_{1 \rightarrow 2} = -F_{2 \rightarrow 1}$$

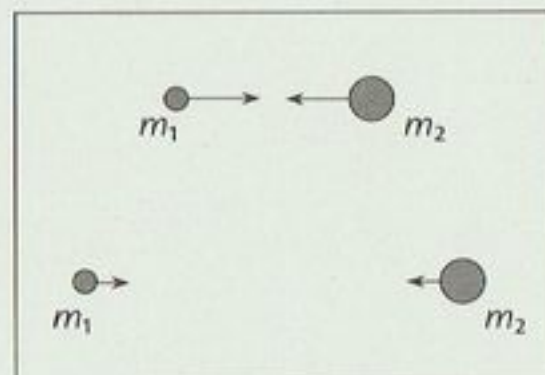
$$F_G = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

canica, l'idea che il moto potesse persistere in assenza di forze era decisamente rivoluzionaria – un concetto che, oltre a essere anti-intuitivo e di difficile comprensione, era in aperto conflitto con le idee aristoteliche comunemente accettate. Se le forze che agiscono su una particella sono molteplici – ad esempio, l'attrito, la resistenza dell'aria e una forza elettrica – allora F è la forza risultante cui è soggetta la particella.

La terza equazione afferma che se esercitiamo una forza su un corpo, quest'ultimo eserciterà su di noi una forza uguale e contraria in verso; in parole povere, «l'azione è uguale alla reazione». Il Sole esercita una forza sulla Terra, e la Terra esercita sul Sole la stessa forza, ma in verso opposto. Un libro esercita una forza sul tavolo dove è appoggiato, ma il tavolo reagisce con una forza di uguale intensità, altrimenti il libro lo attraverserebbe e cadrebbe a terra.

L'ultima equazione ci dà la formula della forza gravitazionale. È una legge di una semplicità incredibile: afferma che due corpi qualsiasi, dotati rispettivamente di massa m_1 e m_2 , si attraggono con una forza F_G proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che le separa. Raddoppiando la distanza, quindi, l'intensità dell'attrazione diventa quattro volte più debole (si veda la figura a fianco). La costante di proporzionalità G_N che, come potete immaginare, è stata battezzata costante di Newton, è universale, nel senso che è la stessa per tutti i corpi dotati di massa, indipendentemente dal materiale di cui sono fatti.

Insieme alle equazioni del moto, l'equazione gravitazionale permise di dare una spiegazione quantitativa del moto dei pianeti intorno al Sole, ma anche di descrivere correttamente gli effetti della gravità sulla Terra, in particolar modo il fatto, osservato da Galileo, che



La conservazione dell'energia

Il principio di conservazione dell'energia gode di un'altissima considerazione in ogni campo della fisica. Per capirlo correttamente, però, bisogna includere tutte le possibili forme di energia: il calore, la radiazione, l'energia di legame, e, per finire, anche la massa. Quando si ha a che fare con sistemi semplici, come nel caso del moto di un corpo soggetto a una forza dipendente dalla posizione (ad esempio un'altalena, o un qualsiasi moto in un campo gravitazionale), l'espressione dell'energia totale U è data dalla relazione:

$$U = \frac{1}{2} mv^2 + V(x)$$

Il primo termine, che contiene il quadrato della velocità, è la parte cinetica, legata al moto, mentre il secondo termine, $V(x)$, corrisponde all'energia potenziale. La forza è definita come l'opposto della derivata di $V(x)$, cioè $F(x) = -dV(x)/dx$. All'aumentare della pendenza dell'energia potenziale corrisponde un aumento della forza. Dalle equazioni di Newton si deduce che l'energia totale si conserva: $dU/dt = 0$. È stata proprio la comprensione dettagliata di sistemi semplici a rendere evidente l'importanza fondamentale di concetti come quello di energia.

L'accelerazione g di un oggetto in caduta libera verso il suolo non dipende dalla sua massa. Per dimostrarlo, basta prendere l'equazione di Newton e sostituire a m , la massa della Terra M e a r il suo raggio R : confrontando il risultato con la formula di Galileo, $F = mg$, otteniamo l'accelerazione $g = G_N M/R^2$. La legge della forza, quindi, ha unificato la descrizione della meccanica celeste e di quella terrestre.

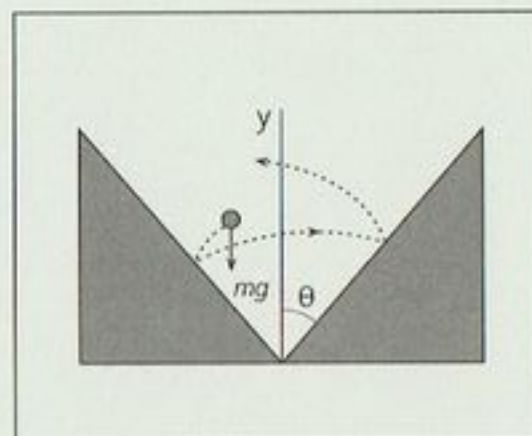
Queste quattro semplici leggi costituiscono una vittoria del pensiero sulla materia. Ciò che ne rende così ampio il campo di applicazione è il fatto che la forza F può essere di qualsiasi genere: non è necessario che sia la gravità. Le equazioni di Newton ci consentono, almeno in linea di principio, di calcolare il moto di molti sistemi interessanti: proiettili, satelliti, pianeti, ma anche automobili, corde di violino, pendoli, hula-hoop, mulini a vento, nuotatori, biciclette e amanti del bungee-jumping. Le equazioni, inoltre, rappresentano un punto di partenza fondamentale per i problemi di statica – ad esempio, per calcolare la distribuzione delle forze in un ponte o in un edificio.

La dinamica non lineare e il caos

Verso la fine del XIX secolo, il fisico matematico francese Henri Poincaré notò che persino sistemi relativamente semplici, governati da equazioni differenziali dall'aria innocua come le leggi di Newton, possono avere orbite estremamente complicate. Ancora più importante è il fatto che una piccolissima variazione delle condizioni iniziali può cambiare notevolmente le caratteristiche del moto del sistema. L'estrema sensibilità alle condizioni iniziali ha conseguenze importanti, poiché conduce a quello che chiamiamo comportamento caotico. Quando ripetiamo un esperimento reale, o una sua simulazione, possiamo riprodurre le condizioni iniziali

solo con una precisione limitata. È ovvio che, se il sistema è molto sensibile alle condizioni iniziali, l'esito di ogni nuovo esperimento «identico» sarà diverso dai precedenti. La nostra capacità di prevedere con esattezza ciò che accadrà ne risulterà fortemente influenzata. L'effettiva imprevedibilità di un sistema definito rigorosamente e completamente deterministico è detta caos deterministico: si tratta di una proprietà generale dei sistemi dinamici non lineari che nell'ultimo quarto di secolo è stata al centro di un'attività di ricerca molto intensa. Il comportamento caotico non è legato a un'equazione specifica: si riferisce al tipo di comportamento esibito dalle soluzioni di un'equazione non lineare nel caso in cui i parametri di quest'ultima siano compresi in un certo intervallo.

Un esempio particolarmente semplice è quello del «biliardo gravitazionale» analizzato da Lehtihet e Miller. Il sistema è formato da una palla che si muove su un piano verticale all'interno di un contenitore con le pareti disposte a cuneo (si veda la figura) ed è soggetta a un campo gravitazionale. Quando colpisce le pareti del contenitore, la palla rimbalza in maniera totalmente elastica. La sua traiettoria può essere calcolata con facilità combinando le equazioni dinamiche di Newton con la forza gravitazionale che abbiamo descritto nei capitoli precedenti. Quest'ultima fa sì che la palla subisca un'accelerazione costante diretta verso il basso, g : la sua traiettoria tra un rimbalzo e l'altro, quindi, non è altro che un segmento parabolico (proprio come nel caso di una palla che si muove nel campo gravitazionale terrestre). Ad ogni rimbalzo, la componente della velocità perpendicolare alla parete inverte la propria direzione. Nonostante l'apparente semplicità del sistema, la palla può passare da un semplice moto periodico a un moto caotico: basta cambiare la condizione iniziale che fissa l'angolo di apertura.



L'eredità di Newton

Se si scrivono le equazioni per un sistema di corpi includendo anche tutte le forze con cui tali corpi interagiscono tra di loro, si ottiene un insieme chiuso di equazioni differenziali accoppiate che descrive la dinamica dell'intero sistema. Si tratta di una proprietà valida per un insieme molto vasto di sistemi dinamici anche molto diversi tra loro ed è proprio questa la ragione per cui i *Principia* di Newton resero possibile la descrizione scientifica quantitativa di quasi ogni tipo di sistema dinamico. In meccanica, le variabili sono le posizioni e le velocità delle particelle, ma potrebbe trattarsi ugualmente della densità della popolazione di varie specie in un sistema ecologico, o di fattori produttivi come i prezzi, le azioni e le retribuzioni in un modello economico. Come abbiamo già accennato, i sistemi dinamici newtoniani, per quanto deterministici, includono una gamma molto ampia di sistemi caotici. I sistemi semplici – ad esempio, due corpi che si attraggono l'un l'altro attraverso una forza gravitazionale centrale – possono essere risolti con esattezza in termini di espressioni e funzioni matematiche ben note. Nella grande maggioranza dei casi, comunque, le soluzioni esatte sono ignote: per sapere che aspetto abbiano le soluzioni e quali siano le loro proprietà, occorre affidarsi a un'analisi globale più qualitativa o al risultato di una simulazione approssimata.

Una scienza di relazioni

La scienza moderna non si limita al dialogo tra la teoria e l'esperimento; spesso anche il computer svolge un ruolo importante, consentendo di analizzare in maniera indipendente le equazioni e il comportamento delle loro soluzioni. L'esperimento, la teoria e la simulazione al computer formano un *ménage à trois* perfetto.

Le equazioni della dinamica di Newton sono valide qualunque sia la forza applicata a un corpo. Newton stesso ne fornì l'espressione per la forza gravitazionale. Tra tutte le altre forze presenti in natura, quella elettromagnetica riveste un'importanza grandissima, poiché è quella che tiene uniti gli atomi e le molecole. La forza elettromagnetica è responsabile di gran parte delle proprietà della materia ordinaria in tutte le sue manifestazioni, dai solidi alle cellule nervose: la loro conoscenza non può prescindere dalla comprensione della forza cui è soggetta una particella carica quando si muove in un campo elettrico e magnetico esterno. Fu Hendrik Antoon Lorentz a definire la legge della forza elettromagnetica nella sua forma generale.

Nella legge di Lorentz sulla forza elettromagnetica sono presenti due contributi. Il primo termine dell'equazione ci dice che una carica arbitraria (positiva) q in moto in un campo elettrico è soggetta a una forza che ha la stessa direzione del campo elettrico E . Ciò significa che se il campo elettrico è uniforme nello spazio e costante nel tempo, la forza esercitata sulla particella sarà costante e quindi la particella si muoverà con accelerazione costante nella direzione del campo elettrico. Una carica grande è soggetta a una forza più intensa rispetto a una carica piccola: a parità di massa, la sua accelerazione sarà maggiore. I campi elettrici, in effetti, possono essere usati per accelerare le particelle cariche. Questa stessa forza è anche responsabile dell'attrazione tra due particelle dotate di cariche opposte: ognuna delle due cariche sente la forza del campo elettrico generato dall'altra e dall'interazione può nascere un legame che dà origine a una coppia.

La forza elettromagnetica

La legge di Lorentz

Hendrik Antoon Lorentz

Lorentz nacque nel 1853 ad Arnhem, in Olanda, dove suo padre esercitava con successo la professione di giardiniere. A 16 anni Lorentz fu ammesso all'Università di Leida; nel 1875, a soli 22 anni, ottenne il dottorato, e due anni dopo, sempre a Leida, gli fu assegnata la cattedra di Fisica teorica, creata appositamente per lui.

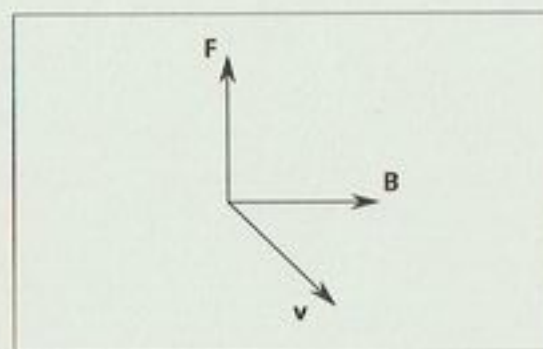
Negli anni successivi Lorentz riuscì a integrare le posizioni atomistiche con le equazioni di Maxwell, avvicinandosi anche alla teoria della relatività. La vastità delle sue conoscenze e la sua grande capacità di giudizio, unite a un carattere paziente e modesto, gli valsero un'altissima reputazione a livello internazionale. Nel 1902 condivise con Pieter Zeeman uno dei primi premi Nobel, per aver spiegato la separazione delle linee spettrali osservata dallo stesso Zeeman. Lorentz morì ad Haarlem nel 1928.

$$\mathbf{F}_{em} = q\mathbf{E} + \frac{q\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$$

Veniamo ora al secondo termine, che descrive la forza dovuta alla presenza di un campo magnetico $\mathbf{B}$ e che è di natura completamente diversa. Come si può vedere, la forza è nuovamente proporzionale alla carica q , ma anche alla velocità $\mathbf{v}$ della particella. Può sembrare sorprendente, ma vuol dire che una particella in quiete non sente la presenza del campo magnetico. Il prodotto «incrociato» dei due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ significa che la forza è perpendicolare sia alla velocità della carica che al campo magnetico, così come è indicato nella figura a fianco. Il valore assoluto del prodotto incrociato è uguale al prodotto dei valori di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$, moltiplicato ancora per il seno dell'angolo tra i due vettori. Se questi sono paralleli, quindi, il loro prodotto incrociato è nullo (perché $\sin 0 = 0$).

Cosa fa questa forza magnetica, allora? Una particella che si muove in un campo magnetico costante sarà soggetta a una forza costante e sempre perpendicolare alla direzione della sua velocità: in altre parole, subirà un'accelerazione di valore costante, perpendicolare alla sua velocità. In particolar modo, se la velocità è perpendicolare al campo magnetico, allora la carica si muoverà su un'orbita circolare contenuta in un piano perpendicolare alla direzione del campo. Se la velocità non è perpendicolare al campo, la sua componente nella direzione di quest'ultimo non cambierà, mentre quella perpendicolare provocherà un moto circolare. Combinando le due componenti della velocità si trova che una carica si muoverà disegnando una spirale attorno alle linee di campo magnetico.

È quel che succede alle particelle cariche che giungono sulla Terra, provenienti dal Sole: le linee del campo magnetico terrestre le «catturano» e le costringono a muoversi a spirale in direzione dei poli magnetici, dove il campo è più intenso. La conseguenza è che le cariche emettono radiazione, illuminando il cielo con il fenomeno delle *aure boreali*.



La moltiplicazione dei vettori

L'adozione di convenzioni intelligenti per le notazioni garantisce un'estrema compattezza delle equazioni, senza che ne sia compromessa la trasparenza. Dati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, possiamo servircene per costruire due tipi distinti di prodotto. Il primo, detto scalare (o interno), perché il suo risultato è una quantità numerica (scalare), viene espresso con un punto: $s = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \varphi$, dove u e v sono, rispettivamente, le lunghezze di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e φ è l'angolo tra i due vettori. Vuol dire, ad esempio, che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2$. L'altro prodotto è detto vettoriale (o incrociato), perché viene espresso mediante una croce ($\times$) e ha come risultato un vettore: $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. La direzione del vettore $\mathbf{w}$ è perpendicolare al piano contenente $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e la sua lunghezza è data da $w = uv \sin \varphi$. Ne consegue che $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$.

Capita spesso di non avere a che fare con una singola carica in movimento, ma con una distribuzione spaziale di carica che varia con continuità: in tal caso, nell'equazione di Lorentz bisogna sostituire la carica q con la densità di carica ρ e la quantità $q\mathbf{v}$ con la densità di corrente $\mathbf{j}$.

A questo punto dobbiamo risolvere la questione seguente: da dove vengono il campo elettrico e quello magnetico, e quali sono le leggi che ne determinano le proprietà? La loro origine è legata alla presenza di cariche in movimento, e dunque ciò che ci serve, oltre alle equazioni di Newton e alla legge di Lorentz sulla forza, è un sistema di equazioni che consenta di determinare i campi elettrici e magnetici a partire da una distribuzione di carica nello spazio e nel tempo. È ovvio che deve trattarsi di un sistema di equazioni di importanza fondamentale – una volta che le abbiamo definite in dettaglio, possiamo combinarle con le equazioni newtoniane e ottenere un sistema chiuso di equazioni per il moto delle cariche e le variazioni dei campi. In teoria, i due sistemi, con i loro due insiemi di incognite, andrebbero risolti simultaneamente. Prima, però, occupiamoci di un'equazione preliminare, che ha a che fare con vettori e derivate parziali.

L'acqua scorre nei fiumi, il gas nei tubi, la corrente elettrica nei fili e il traffico nelle città; la gente passa negli edifici e il denaro per le nostre mani. La carica elettrica può dar vita a un flusso vero e proprio, una corrente elettrica, ma non può semplicemente sparire: la carica è una quantità conservata. Esiste sempre una distribuzione spaziale e temporale di carica che ne rappresenta la densità. L'equazione di continuità è la relazione matematica esatta tra un flusso, o corrente, e una variazione di densità ed è una *legge di conservazione*. Questo tipo di equazione è detto *equazione alle derivate parziali* perché contiene derivate spaziali e temporali di funzioni dello spazio e del tempo.

L'equazione di continuità è un'equazione di flusso che esprime una legge di conservazione *locale* poiché vale per un volume qualsiasi, indipendentemente dalla scala considerata. Se in un ufficio c'è un certo numero di persone, tale numero può cambiare solo se la gente entra o esce (da una porta). Questo vale per tutte le stanze, ma anche per un piano intero, per un palazzo o per una città. L'equazione di continuità, in sostanza, afferma che la quantità (di carica, di gas o di denaro) in un dato elemento di volume può cambiare solo in corrispondenza di una variazione del flusso j attraverso la superficie che delimita l'elemento di volume: la carica può fluire, ma non può sparire. Nel caso di un *flusso stazionario** si ha $\partial\rho/\partial t = 0$. Questa condizione ci dice che il «fluido» è incompressibile, perché la sua densità locale ρ non cambia. Per un fluido stazionario, l'equazione ci dice che, dato un volume qualsiasi, il fluido che ne esce deve essere uguale a quello che vi entra. Ecco perché un fiume scorre più rapidamente laddove le rive sono più strette e il fondale è basso. È una condizione che vale, solitamente, per i liquidi reali, ma non per i gas, né per le persone: in una stanza possono entrare molte senza che ne esca neanche una, nel qual caso la densità media all'interno della stanza aumenterà.

Una legge di conservazione locale

L'equazione di continuità

Un flusso lento

La pece, un derivato del catrame, a temperatura ambiente è un solido. È talmente fragile che la si può frantumare con una martellata. Eppure è un fluido, sebbene molto viscoso. Nel 1927, Thomas Parnell, dell'Università del Queensland, in Australia, allestì un esperimento divertente: riempì di pece un imbuto di vetro, lo sigillò e dopo tre anni lo riaprì. Il resto dell'esperimento consistette nell'aspettare, e poi aspettare ancora. Ogni nove anni una gocciolina di pece usciva dall'imbuto: un flusso davvero lento! L'esperimento è ancora in corso.

* Il termine «stazionario» non vuol dire statico: il flusso è costante, ma è pur sempre un flusso e questo significa che qualcosa si sta muovendo. È come un motore che gira stando fermo in un posto ben preciso.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

Le equazioni di Maxwell costituiscono uno dei pilastri della fisica classica. Laddove le leggi di Newton ci dicono come si muove una particella una volta specificata la forza cui è soggetta, le equazioni di Maxwell ci permettono di definire le forze elettromagnetiche attraverso la determinazione dei campi elettrici e magnetici (rispettivamente E e B) generati da una data distribuzione di cariche, o, più generalmente, da una densità di carica ρ e da una densità di corrente elettrica j . Noti i campi, si può calcolare la forza di Lorentz che agisce sulle cariche.

Le equazioni di Maxwell descrivono nella maniera più generale possibile tutti i fenomeni elettromagnetici. Da loro deriva, ad esempio, l'esistenza della radiazione elettromagnetica, che conosciamo – a seconda della lunghezza d'onda – come onde radio, luce visibile o raggi X. Un'altra conseguenza è che tale radiazione è emessa anche da una carica sottoposta a un'accelerazione. La teoria elettromagnetica è un bellissimo esempio di *teoria di campo*: una delle sue proprietà fondamentali è il fatto che i campi di forza, come quelli elettromagnetici, rappresentano gradi di libertà fisici che possono propagarsi nello spazio e nel tempo (sotto forma di radiazione) trasportando energia e quantità di moto.

A prima vista, le equazioni possono sembrare un po' artificiose, ma in realtà la forma con cui sono presentate è, al tempo stesso, naturale ed efficiente e fonde in maniera sorprendente la praticità e la trasparenza. Le espressioni e gli operatori differenziali che vi compaiono hanno l'aria complicata, ma sono una conseguenza abbastanza naturale del fatto che stiamo lavorando con campi vettoriali. I campi elettrici e magnetici presenti nelle equazioni di Maxwell sono di tipo vettoriale, nel senso che dipendono dallo spazio e dal tempo

L'elettrodinamica

Le equazioni di Maxwell

James Clerk Maxwell

L'elettromagnetismo ha una lunga storia di sviluppi sperimentali e teorici; tra i nomi da ricordare, citiamo Coulomb, Ampère e Faraday. Di Maxwell possiamo dire che fu lui a completare quell'edificio monumentale che è la teoria dell'elettromagnetismo.

Maxwell nacque a Edimburgo nel 1831, in un'antica famiglia scozzese. Nel 1865, dopo aver insegnato ad Aberdeen e a Londra, si ritirò in campagna per realizzare la sua opera maggiore, il *Trattato sull'elettricità e il magnetismo*, pubblicato nel 1873. Qui, tutti gli elementi dell'elettrodinamica classica si trovano riuniti nelle quattro equazioni che potete vedere qui a fianco. Maxwell diede anche un contributo importante alla teoria cinetica dei gas. Nel 1871 divenne il primo direttore del Cavendish Laboratory, a Cambridge, dove morì a soli 48 anni.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

e che, inoltre, hanno tre componenti ciascuno. Perciò in ogni punto dello spazio abbiamo due vettori, associati rispettivamente al campo elettrico e al campo magnetico e dotati di una direzione ben definita. In due delle equazioni troviamo delle derivate temporali che determinano la dinamica dei campi elettrici e magnetici: sono le «equazioni del moto».

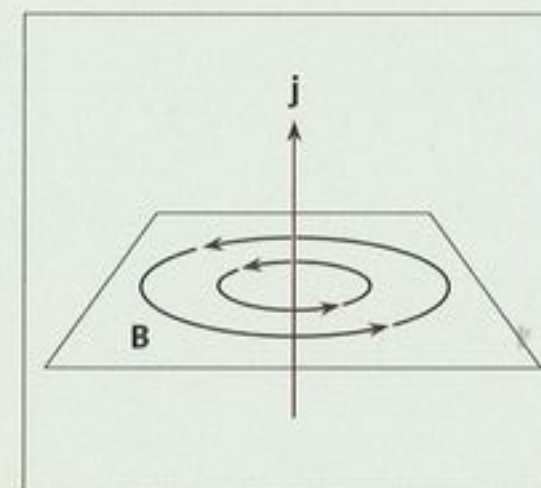
La prima equazione di Maxwell definisce il campo elettrico generato dalla presenza di cariche p , ed è nota come legge di Gauss. L'equazione ha una forma che ricorda molto l'equazione di continuità analizzata poco fa. La densità di carica p è una sorgente (un pozzo) di linee di campo elettrico. Se p corrisponde a una carica positiva q ferma in un punto, la soluzione per E sarà un campo dotato di una simmetria sferica perfetta e diretto dalla carica verso l'esterno. Da questo campo radiale nasce la forza coulombiana tra due cariche elettriche: il suo andamento, proporzionale all'inverso del quadrato della distanza, ricorda molto la legge della gravitazione di Newton, con la differenza che al posto delle masse abbiamo le cariche e la costante di proporzionalità che riflette l'intensità dell'interazione è diversa.

La seconda equazione – nota come legge di Ampère – è un'equazione che mette in relazione i fenomeni elettrici e quelli magnetici e afferma, in sostanza, che una corrente elettrica j (o, più generalmente, una carica in movimento) può generare intorno a sé un campo magnetico, proprio come una carica immobile genera un campo elettrico. L'equazione contiene il rotore del campo magnetico: il vettore delle derivate spaziali, indicato dal simbolo ∇ , è applicato tramite il prodotto vettoriale alle tre componenti del campo magnetico B ; la corrente j è la sorgente del campo.

La legge di Ampère spiega perché, avvicinando una bussola a un filo percorso da una corrente elettrica, l'ago di quest'ultima subisce una

Confrontiamo le forze

Possiamo confrontare l'intensità della forza di gravità e delle forze elettriche paragonandone l'intensità nel caso di una coppia di particelle fondamentali, ad esempio due elettroni. Il rapporto tra le due forze non dipende dalla distanza che separa le due particelle. La domanda che possiamo farci, allora, è questa: gli elettroni si allontaneranno a causa della repulsione elettrica, o si avvicineranno sotto l'effetto dell'attrazione gravitazionale reciproca? Scopriamo così che la forza elettrica è enormemente più forte (per qualcosa come 39 ordini di grandezza!). Per dimostrare che le forze elettromagnetiche sono molto più intense della forza di gravità basta un semplice esperimento. Non dimenticate che una piccola calamita è abbastanza potente da riuscire a sollevare dal suolo un chiodo di ferro: la calamita, cioè, esercita una forza molto più intensa di quella gravitazionale, nonostante quest'ultima sia generata da tutta la materia di cui è composto il pianeta che sta sotto il chiodo.



Linearità

Se osserviamo le equazioni di Maxwell, vediamo che i campi elettromagnetici vi compaiono solo in forma lineare (non ci sono quadrati o potenze superiori di E e B). Da questa linearità deriva una proprietà importante: è possibile sommare le soluzioni. Ad esempio, se prima risolvete le equazioni per delle correnti e delle cariche considerate separatamente, la soluzione per la configurazione in cui queste sono presenti contemporaneamente non è che la somma delle due soluzioni distinte.

deviazione. Se j rappresenta la corrente che scorre in un filo rettilineo sottile, quest'ultimo sarà circondato da un campo magnetico B (come si può vedere nella figura a fianco). La seconda equazione di Maxwell, però, ci dice anche che un campo magnetico può essere generato da un campo elettrico variabile, poiché in tal caso $\partial E / \partial t$ è diverso da zero.

La terza equazione assomiglia un po' alla prima, con la differenza che al posto del campo elettrico troviamo il campo magnetico e il secondo membro è nullo. Quest'ultima è una conseguenza del fatto che non esistono cariche magnetiche, dove per carica magnetica intendiamo un polo isolato, sia esso Nord o Sud. Se prendiamo una calamita e la spezziamo in due, otterremo due calamite; possiamo andare avanti ad oltranza, ma continueremo a ottenere delle calamite. In natura si possono trovare solo dipoli magnetici – coppie formate da un polo Nord e da un polo Sud. Per generare il campo di un dipolo magnetico, comunque, possiamo anche servirci del passaggio di una corrente elettrica in una bobina o in una spira di filo conduttore (è una conseguenza della seconda equazione). Si può dimostrare, infatti, che tutti i fenomeni magnetici conosciuti possono essere spiegati in termini di cariche elettriche in movimento. La terza equazione di Maxwell, dunque, sancisce la non-esistenza di poli magnetici isolati. Si può notare come le equazioni di Maxwell possiedano una sorta di simmetria tra le proprietà elettriche e quelle magnetiche, a eccezione delle cariche e delle correnti, che sembrano esistere solo nella variante elettrica.

L'ultima equazione, citata spesso come legge di Faraday, esprime il fatto che la variazione di un campo magnetico può indurre un campo elettrico, il quale, a sua volta, può far muovere delle cariche elettri-

che. Le cariche cominciano a muoversi in modo tale da generare campi magnetici che compensano qualsiasi variazione del campo magnetico.

La struttura di questo sistema di equazioni differenziali è indubbiamente piuttosto complicata. Stiamo parlando di una teoria dei campi, per la precisione di campi vettoriali. Data una densità di carica e di corrente, bisogna risolvere le equazioni per $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, ognuno dei quali ha tre componenti. In totale, quindi, le componenti di campo incognite sono sei. La prima e la terza equazione hanno una sola componente, mentre la seconda e la quarta includono tre componenti ciascuna, trattandosi di equazioni vettoriali tridimensionali. In conclusione, quindi, abbiamo otto equazioni per sei componenti di campo: in linea di principio si tratta di un sistema sovradeterminato. Di solito un sistema di equazioni sovradeterminato è inconsistente. L'interpretazione corretta del problema è la seguente: la seconda e la quarta equazione sono utilizzate per descrivere l'evoluzione temporale dei campi, mentre le altre due servono semplicemente a legare tra loro le varie componenti dei campi in qualsiasi istante. In altre parole, impongono un vincolo sulla configurazione dei campi in un istante arbitrario.

Se le cose stessero realmente così, allora, in teoria, potrebbe esserci un problema di inconsistenza. Se prendiamo per i campi una configurazione che soddisfi le equazioni di vincolo, diciamo all'istante zero, allora dobbiamo assicurarci che, facendo evolvere la configurazione secondo le equazioni dinamiche, i vincoli saranno sempre rispettati. Maxwell dimostrò che per il suo sistema di equazioni tale condizione era sempre valida. Anzi, fu proprio per questa ragione che aggiunse un termine alla legge di Ampère originale, che nella sua forma iniziale avrebbe reso inconsistente il sistema.

I monopoli: essere o non essere?

Finora non si è mai riusciti a osservare un monopolio magnetico. Naturalmente ciò non ne esclude l'esistenza, almeno in linea teorica. Fu Paul Dirac, nel 1931, a dare una ragione molto convincente a favore della loro esistenza. Dall'unione dell'elettromagnetismo di Maxwell con la teoria dei quanti, Dirac dedusse che l'esistenza di un monopolio – fosse anche l'unico – spiegherebbe la quantizzazione della carica elettrica che si osserva in natura: tutte le particelle libere presenti in natura, infatti, hanno cariche elettriche che corrispondono a multipli interi della carica di un elettrone. Forse i monopoli esistono solo in coppie unite da un legame fortissimo, o forse i poli Nord e Sud si sono annichilati nei primi istanti di vita dell'Universo. Nell'arena teorica delle teorie unificate delle particelle elementari e delle interazioni fondamentali i monopoli ritornano periodicamente. Possiamo dire, quindi, che la loro attività continua, anche se dietro le quinte.

L'energia elettromagnetica

Il campo elettromagnetico trasporta energia. Per calcolare l'energia associata a una certa configurazione del campo, si possono sommare i diversi contributi dei piccoli elementi che formano il volume totale preso in esame. Per dirla in gergo, si integra la densità di energia su tutto il volume. Allora qual è la funzione associata all'energia, ovvero la sua densità? Semplicemente:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2$$

L'espressione somiglia non poco a quella dell'energia di un sistema meccanico, in cui il primo termine rappresenta l'energia cinetica e il secondo quella potenziale. L'analogia con i sistemi meccanici può essere spinta ancora più in là, perché il campo ha una densità di quantità di moto che può essere espressa elegantemente come un campo vettoriale:

$$\mathbf{S} = c \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Da queste formule capiamo quanto siano importanti i concetti di energia e di quantità di moto.

A questo punto sorge spontanea una domanda. Abbiamo visto come nelle equazioni di Maxwell compaiano sia le cariche che le correnti. Nel capitolo sull'equazione di continuità abbiamo parlato della conservazione delle cariche. Ma allora dov'è finita quell'equazione? La risposta è semplice: le equazioni di Maxwell implicano l'equazione di continuità, e dunque non c'è bisogno di aggiungerne una supplementare per la conservazione della carica elettrica.

Se partiamo dall'ipotesi che non siano presenti altre forze, il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico esterno è determinato in maniera univoca dalla combinazione della legge di Lorentz e delle equazioni di Newton. Le equazioni di Maxwell, a loro volta, descrivono i campi elettromagnetici generati da cariche e correnti esterne. Ora, se combiniamo le equazioni di Newton con quelle di Maxwell, otteniamo un sistema chiuso che descrive il moto delle particelle e i campi cui queste danno origine. Per dare coerenza al tutto, di fatto, bisogna risolvere simultaneamente le equazioni di Newton e quelle di Maxwell, tenendo conto dell'effetto di *feedback* dei campi sulle cariche e viceversa. Si tratta di un effetto descritto correttamente dall'insieme completo delle equazioni.

L'insieme delle leggi di Newton e delle equazioni di Maxwell offre una descrizione unificata dei fenomeni elettrici e magnetici, dalle forze tra le cariche – già trattate da Coulomb – a sistemi complessi come i motori elettrici, le dinamo, i trasformatori, le antenne, i plasmi (fluidi formati da particelle cariche) e gli acceleratori di particelle. E non è tutto: come abbiamo già detto, c'è anche la teoria della radiazione elettromagnetica, quale è la luce. Una bella sorpresa di cui ci occuperemo nel prossimo capitolo.

Le onde sono un fenomeno molto diffuso: onde d'acqua, onde sonore, onde radio e onde ricorrenti, sono tutti fenomeni periodici, in un modo o nell'altro. Le onde sono oscillazioni che si propagano attraverso un mezzo, quale l'acqua o l'aria, ma anche nel vuoto, come nel caso delle onde elettromagnetiche descritte dalle equazioni che presentiamo in questo capitolo. Si tratta di equazioni d'onda che derivano direttamente dalle equazioni di Maxwell in assenza di cariche e di correnti. La loro importanza è così grande che abbiamo scelto di analizzarle separatamente.

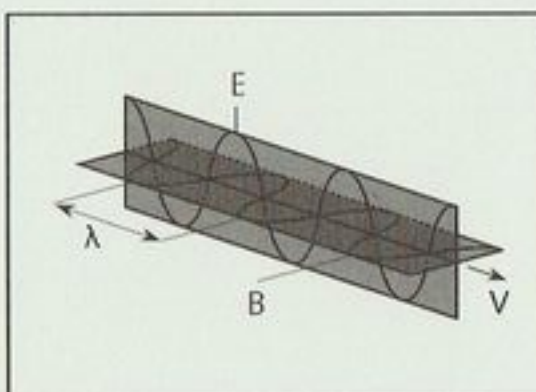
Le onde che si propagano sono caratterizzate da una lunghezza d'onda (λ), da una velocità (v) e da una frequenza (f). Queste tre quantità sono legate tra loro da una relazione semplice: $\lambda f = v$. L'ampiezza ci dice quanto è grande l'oscillazione. Nel caso delle onde elettromagnetiche assistiamo alla propagazione di campi elettrici e magnetici, con una proprietà particolare: le oscillazioni elettriche e quelle magnetiche sono perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda, nonché perpendicolari tra di loro – si parla infatti di onde trasversali (si veda la figura qui a fianco).

Maxwell dimostrò che la velocità di propagazione di queste onde corrisponde esattamente alla ben nota velocità della luce, c . La luce visibile, quindi, non era altro che un fenomeno ondulatorio di tipo elettromagnetico, appartenente a uno spettro continuo di onde elettromagnetiche di lunghezza d'onda e frequenza variabili. Andando verso valori di lunghezza d'onda sempre più piccoli, possiamo identificare la radiazione, nell'ordine, con le onde radio, le microonde, la radiazione termica, gli infrarossi, la luce visibile, gli ultravioletti e i raggi X.

Grazie alle equazioni di Maxwell, quindi, è stato possibile realizzare una descrizione unificata dei fenomeni elettrici, magnetici, ottici e radiativi. L'unione delle equazioni di Maxwell e di quelle di Newton costituisce il cuore pulsante di tutta la fisica classica.

Le onde elettromagnetiche

Le equazioni d'onda



L'etere

Inizialmente si pensava che le onde elettromagnetiche si propagassero in un mezzo detto «etere», che permeava tutto lo spazio. Fu solo dopo che Einstein ebbe formulato la sua relatività ristretta che si abbandonò l'etere fantomatico, accettando l'idea che le onde elettromagnetiche potessero propagarsi nello spazio vuoto.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0$$

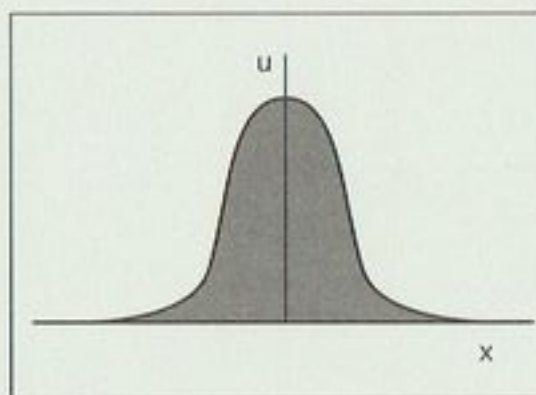
Lo studio delle onde solitarie, o *solitoni*, ebbe inizio nel XIX secolo, quando un giovane ingegnere scozzese, John Scott-Russell, notò, in un canale molto lungo, un'onda isolata che viaggiava mantenendo una forma costante fin dove si riusciva a vederla. Si narra che Scott-Russell balzò a cavallo e si mise a costeggiare il canale per miglia, all'inseguimento dell'onda. Un solitone non è altro che un rilievo isolato che nel propagarsi in un mezzo non si allarga, non perde la propria forma e non si affievolisce (si veda la figura a fianco). La stabilità dei solitoni è davvero impressionante e li rende molto interessanti in diversi campi, dalla trasmissione senza errori di impulsi luminosi in una fibra ottica (o di impulsi elettrici nelle cellule nervose) alla comprensione degli tsunami.

Il dibattito sulla possibilità che le onde solitarie esistessero realmente andò avanti per molto tempo e coinvolse molte personalità scientifiche illustri; si riteneva che un fenomeno del genere potesse accadere solo in presenza di una congiuntura miracolosa, vista la tendenza naturale delle onde ad allargarsi e a disperdersi. La controversia ebbe fine nel 1895, quando Korteweg e il suo allievo De Vries formularono la loro equazione per un'onda che si propagava nell'acqua di un canale rettangolare poco profondo, dimostrando che l'equazione ammetteva effettivamente soluzioni interpretabili come onde solitarie. Si tratta di un'equazione non lineare, perché nell'ultimo termine la funzione u appare in forma quadratica, e in effetti siamo molto lontani dalle equazioni lineari delle onde elettromagnetiche. Nonostante ciò, l'equazione di Korteweg-De Vries rappresenta il prototipo di un'ampia gamma di equazioni solitoniche non lineari dotate di caratteristiche comuni.

I solitoni hanno altre proprietà interessanti: ad esempio, la loro velocità di propagazione è proporzionale alla loro ampiezza, o altezza – perciò un'onda più grossa supererà un'onda più piccola. Quando due solitoni si incontrano, inoltre, riemergono dall'interazione inalterati e continuano per la propria strada, accumulando solo un leggero ritardo. Dunque sono onde incapaci di distruggersi a vicenda e questa è una caratteristica che le rende particolarmente interessanti.

Onde solitarie

L'equazione di Korteweg-De Vries



Diederik Johannes Korteweg e Gustav de Vries

Korteweg nacque nel 1848 a 's-Hertogenbosch, in Olanda. Terminati gli studi a Delft, si trasferì ad Amsterdam per lavorare alla tesi di dottorato sotto la direzione di Van der Waals. Tre anni dopo, nel 1881, Korteweg fu nominato professore di matematica, meccanica e astronomia all'Università di Amsterdam. Le sue ricerche di fluidodinamica lo portarono alla formulazione della celebre equazione che apparve per la prima volta nella tesi di dottorato di De Vries, nel 1895. Korteweg morì nel 1941, all'età di 93 anni.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

I tre principi della termodinamica spiegano in che modo un sistema scambia energia con un altro sistema o con l'ambiente circostante. Lo scambio può consistere in un lavoro effettuato dal sistema, o nell'assorbimento di calore. In linea di principio potrebbe anche cambiare il numero di particelle coinvolte. Nel caso di processi quasi-statici, il sistema si mantiene in equilibrio e i processi stessi sono reversibili. Può anche capitare, però, che il sistema vada da uno stato di equilibrio a un altro stato di equilibrio attraverso un processo di non-equilibrio (come nel caso dell'espansione libera di un gas). Volendo sintetizzare, possiamo dire che:

1. Il primo principio afferma che il calore è una forma di energia e che l'energia si conserva.
2. Il secondo ci dice che un sistema non può trasformare tutto il calore assorbito in lavoro. Non esistono macchine con un'efficienza del cento per cento. Con il secondo principio, fa la sua comparsa una nuova variabile di stato molto importante, l'entropia S .
3. Esiste una temperatura minima, alla quale il sistema è caratterizzato dal massimo ordine possibile e l'entropia tende a zero. È una conseguenza della natura quantistica di tutti i sistemi fisici, che diventa rilevante a temperature molto basse.

È incredibile come lo stato di un sistema macroscopico formato da un grandissimo numero di particelle in equilibrio possa essere descritto in maniera soddisfacente da un numero ridottissimo di variabili e di parametri. Si tratta di un fenomeno generale, valido per un'ampia gamma di liquidi, gas, solidi e di loro miscele.

Il nostro interesse per la termodinamica riguarda la descrizione di processi in cui uno o più (sotto)sistemi macroscopici prendono parte a uno scambio di energia. Lo scambio può avvenire per contatto ter-

La termodinamica

I tre principi della termodinamica

Un po' di storia

La termodinamica si sviluppò prima che si capisse la natura atomica della materia. Il medico tedesco Julius Robert Mayer (1814-1878) fu il primo ad affermare esplicitamente, nel 1842, che il calore è una forma di energia. L'importanza della scoperta e delle sue applicazioni giunse solo dopo molto tempo, e ciò amareggiò non poco Mayer. Le ricerche sulle macchine termiche risalgono ai lavori di Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832), autore della legge dell'entropia, oggi nota come secondo principio della termodinamica. Furono Clausius e Lord Kelvin a dare alla termodinamica la forma di una teoria consistente; ulteriori contributi vennero da Gibbs intorno al 1875. Il terzo principio, secondo cui l'entropia è nulla allo zero assoluto, è opera di Hermann Walther Nernst (1864-1941).

$$dU = \delta Q - \delta W$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad \frac{dS}{dt} \geq 0$$

$$T \rightarrow 0 \Rightarrow S \rightarrow 0$$

mico tra i sistemi, o in seguito all'azione di una forza, o in altri modi ancora. Adesso ci occuperemo di come cambiano le variabili che caratterizzano lo stato di un sistema. Il numero di variabili indipendenti è uguale al numero di modi in cui si può dare o togliere energia al sistema. A ognuna di queste variabili è associata una variabile dipendente. Metà di queste variabili di stato ha una natura estensiva (ovvero è proporzionale alla quantità di materia o alle dimensioni del sistema), come ad esempio il volume V ; l'altra metà è di tipo intensivo, come la pressione P e la temperatura T . Per descrivere in maniera esauritiva le proprietà termodinamiche di un sistema, quindi, serve un numero pari di variabili, mentre nell'equazione di stato (come $PV = RT$, di cui abbiamo parlato nell'introduzione), tipicamente, il numero delle variabili è dispari. Da ciò si deduce che potrà capitare di imbatterci in un'ulteriore variabile termodinamica.

Dato che quanto ci interessa è l'evoluzione dello stato di un sistema, non c'è da stupirsi se per descriverne le variazioni infinitesime torneremo a servirci di differenziali e derivate.

Il primo principio della termodinamica afferma, in sostanza, che il calore è una forma di energia. Per la precisione, afferma che la variazione di energia dU è uguale al calore assorbito dal sistema dQ meno la quantità di lavoro fatta dal sistema dW^* . In alternativa, possiamo dire che il primo principio sancisce la conservazione dell'energia. Dall'equazione si possono dedurre due casi particolari: uno in cui non viene effettuato lavoro ($dW = 0$), e l'altro in cui non viene scambiato calore ($dQ = 0$); in quest'ultimo caso si parla di *processo adiabatico*.

Adesso dobbiamo fare attenzione, perché non tutti i processi ammissibili dal punto di vista energetico accadono realmente. Certo, è possibile trasformare interamente il lavoro in calore, ma riuscire a fare il contrario è tutt'altro che scontato.

* A differenza dell'energia, il calore e il lavoro non sono variabili di stato del sistema; si usa quindi il simbolo d -tagliato (d) per indicare che le loro variazioni infinitesime non sono differenziali esatti [N.d.T.].

«Mission impossible»

Gli inventori di tutto il mondo hanno speso una quantità enorme di energie nel tentativo di costruire il cosiddetto *perpetuum mobile*, ovvero una macchina che, una volta messa in moto, andasse avanti all'infinito senza richiedere un apporto di energia esterno. Un dispositivo capace di generare da solo l'energia necessaria al suo funzionamento. Sono stati proposti i marchingegni più originali. Tra questi, ce ne sono alcuni molto efficienti. L'impossibilità del moto perpetuo, tuttavia, è deducibile in maniera rigorosa dai primi due principi della termodinamica. Nel 1775, l'Accademia delle Scienze francese decise di non prendere più in considerazione proposte e pubblicazioni che affermassero la possibilità di realizzare il moto perpetuo. Nonostante ciò, ogni tanto salta fuori qualche nuova idea.

Noi tutti sappiamo che, se scaldiamo una ruota, questa non si metterà a girare da sola — per quanto ciò non sia vietato dalla conservazione dell'energia. Non è un'eventualità impossibile, ma è pur sempre molto, molto improbabile. Una macchina a vapore, invece, è in grado di trasformare il calore in lavoro. La risposta alla domanda cruciale: «In che misura si può trasformare il calore in lavoro?», ci è data dal secondo principio della termodinamica, indubbiamente il più famoso dei tre, a tal punto da essere citato nel famoso saggio di C.P. Snow *Le due culture*, pubblicato sul «New Statesman» nel 1956. Snow denuncia pubblicamente l'analfabetismo scientifico di molte persone istruite, osservando come quasi tutti conoscano il titolo di un dramma di Shakespeare ma praticamente nessuno conosca l'argomento — altrettanto importante — di cui parla il secondo principio della termodinamica!

Del secondo principio esistono due formulazioni, diverse ma equivalenti. Quella di Kelvin afferma che non esiste un processo termodinamico il cui unico effetto sia quello di estrarre calore da una sorgente per poi trasformarlo integralmente in lavoro. Possiamo parafrasarla dicendo che non può esistere una macchina ideale, e tale impossibilità è una questione di principio. Una macchina reale, invece, è capace di convertire il calore in lavoro passando attraverso una sequenza di stati termodinamici, ma al tempo stesso deve disperdere una parte del calore estratto nell'ambiente (che svolge il ruolo di sorgente di calore a bassa temperatura). La macchina reale non può convertire in lavoro tutto il calore estratto, e questo implica che la sua efficienza non possa mai raggiungere il cento per cento.

Il secondo principio nella formulazione di Clausius afferma che non esiste un processo termodinamico il cui unico effetto sia quello di estrarre calore da una sorgente fredda e poi trasferirlo a una sorgente calda. In altri termini, il frigorifero ideale non esiste. In un frigorifero reale, infatti, è necessario fare del lavoro per trasferire il ca-

lore dalla sorgente fredda a quella calda; come tutti sanno, per refrigerare serve energia.

Il secondo principio porta con sé il concetto di *entropia*; quest'ultima viene indicata con S . Si tratta di una variabile di stato, come la temperatura, ma la sua natura è più complessa, tant'è che non la si può misurare direttamente. La variazione di entropia è legata alla temperatura T e al calore dQ . Possiamo dire che quando un sistema assorbe una quantità infinitesima di calore, la sua entropia aumenta secondo la relazione $dQ = TdS$.

In termini di entropia, il secondo principio della termodinamica afferma che, per qualsiasi processo che avvenga in un sistema chiuso l'entropia non può diminuire. Nel caso del frigorifero ideale, ad esempio, si estrarrebbe dal sistema a temperatura T_1 una quantità (positiva) di calore q , per poi cederla all'ambiente alla temperatura T_2 , più alta. La variazione totale di entropia, allora, sarebbe $\Delta S = -q/T_1 + q/T_2$, ovvero $\Delta S = q(1/T_2 - 1/T_1)$: si tratterebbe, cioè, di una quantità negativa, in violazione del secondo principio. La conclusione è che non può esistere un frigorifero ideale.

Il calore tende a indurre nel sistema moti casuali – le molecole cominciano a urtarsi con maggiore energia – e questo potrebbe far pensare che l'entropia misuri il *disordine* del sistema. Questa definizione può essere resa più rigorosa studiandone la correlazione statistica con gli stati accessibili al sistema a livello microscopico. Nell'ambito della meccanica statistica, si può dimostrare che, in un sistema chiuso lontano dall'equilibrio, l'entropia è destinata a crescere fino a un massimo che corrisponde allo stato di equilibrio. Si tratta, in buona sostanza, di un effetto della tendenza ad «andare da uno stato meno probabile a uno più probabile». Se si lascia cadere una goccia di inchiostro in un recipiente pieno d'acqua, le molecole di in-

Entropia e informazione

A livello microscopico, l'entropia può essere definita come il logaritmo del numero di stati accessibili e dal momento che, all'aumentare della temperatura cresce il numero degli stati accessibili, aumentano anche l'entropia e il disordine. Questa definizione di entropia coincide con quella di informazione data nell'ambito della moderna teoria dell'informazione, di cui Claude Elwood Shannon è stato il fondatore. Il contenuto di informazione di un libro, dunque, equivale al logaritmo di tutti i possibili modi in cui lo si sarebbe potuto riempire di parole (o di lettere).

Come possono coincidere l'informazione e il disordine? Immaginate due classi piene di bambini. In una delle due regna la disciplina e tutti i bambini cantano «Buon compleanno». Nell'altra, l'insegnante se ne è andata e ha lasciato da soli i bambini, che passano il tempo a parlare tutti insieme. È chiaro che la classe disordinata produrrà un'informazione circa 25 volte maggiore di quella prodotta dalla voce che canta «Buon compleanno» da sola: pertanto, ha senso identificare il disordine con l'informazione.

chostro cominceranno a diffondersi e a disperdersi nell'acqua fino a raggiungere la situazione di equilibrio, in cui la loro distribuzione nel recipiente è uniforme. È ovvio che il processo inverso non accadrà, quanto meno non spontaneamente. Pensate all'analogia seguente: se cominciamo a disporre a caso gli oggetti presenti nella stanza di un adolescente, è certo che non creeremo uno stato ordinato, ma un gran caos. E come molti di noi sanno fin troppo bene, è proprio questo lo stato di equilibrio cui tendono quasi tutte le stanze degli adolescenti. Per creare uno stato ordinato bisogna scegliere la strada opposta, facendo uno sforzo per mettere ogni cosa esattamente al suo posto. E questa è un'attività che richiede davvero un bel po' di energia.

Dalle riflessioni che abbiamo appena fatto si è giunti a una conclusione suggestiva: dato che l'entropia totale – e con lei la quantità di disordine – è destinata a crescere, allora il destino ultimo di qualsiasi sistema chiuso è il caso puro e semplice, la cosiddetta «morte termica». È probabile che il discorso valga anche per l'Universo nel suo insieme – una prospettiva davvero fosca. Non dobbiamo dimenticare, comunque, che il secondo principio non proibisce che all'interno di un sistema chiuso ci sia un sottosistema che diminuisce la propria entropia cedendo calore che verrà assorbito da altre parti del sistema complessivo. È così, ad esempio, che si ottengono livelli elevati di ordine e complessità nei sistemi biologici.

Il terzo principio della termodinamica spiega cosa capita quando un sistema si avvicina alla temperatura più bassa in assoluto, quella di zero gradi Kelvin (più o meno -273° Celsius). A questa temperatura l'agitazione termica viene meno e il sistema si ritrova nello stato di ordine massimo; il numero degli stati accessibili si riduce allo stato di minima energia, e se lo stato in questione è unico l'entropia diventa pari a zero. L'esistenza di uno stato simile è una conseguenza delle proprietà quantistiche della natura.

L'equazione di Boltzmann costituisce il fondamento della teoria cinetica, che collega la fisica dei sistemi microscopici a quella dei sistemi macroscopici. L'equazione, che appartiene al regno della *meccanica statistica*, descrive in maniera statistica il moto di grandi numeri di particelle. L'equazione di Boltzmann rende possibile una derivazione sistematica di processi di trasporto macroscopici come la diffusione, il flusso del calore e la conducibilità a partire dalle leggi di natura valide su scala microscopica. Pur essendo valida solo per sistemi cosiddetti «diluuti», cioè contenenti un gran numero di particelle separate da distanze grandi rispetto alle loro dimensioni, è alla base di teorie importantissime sul piano pratico e tecnologico, come la dinamica dei fluidi e dei plasmi, e l'aerodinamica. L'equazione cinetica è alla base della descrizione dei sistemi non in equilibrio, soprattutto per ciò che riguarda l'analisi dei processi che conducono all'equilibrio.

Per descrivere il comportamento di sistemi macroscopici come i gas o i liquidi, non occorre conoscere in dettaglio le proprietà delle singole particelle che li compongono. Ed è una fortuna, perché altrimenti ci toccherebbe risolvere un sistema di 10^{23} equazioni accoppiate, se non di più. In realtà, basta conoscere le proprietà medie delle particelle, ed è qui che entrano in gioco le considerazioni statistiche. Ora, dietro il fatto di doversi occupare di moltissime particelle, si cela una benedizione: come ben sanno i proprietari dei casinò e le compagnie di assicurazioni, se si ha a che fare con grandi numeri, gli argomenti statistici diventano estremamente precisi, e quindi potenti. Perciò, mentre il moto delle singole particelle in un fluido (sia esso un gas o un liquido) può anche avere una buona dose di casualità, la funzione di distribuzione statistica che descrive le probabilità di trovare

La teoria cinetica

L'equazione di Boltzmann

Un po' di storia

Clausius, Maxwell e Boltzmann furono i pionieri dell'approccio microscopico allo studio dei fenomeni macroscopici. Nel 1872 Ludwig Boltzmann (1844-1906) formulò l'equazione che porta il suo nome. I metodi sistematici per risolverla furono sviluppati da Chapman ed Enskog intorno al 1916.

Boltzmann aveva una personalità energica e impulsiva. Dopo aver studiato in Austria, a Vienna, a 25 anni divenne professore di Fisica a Graz, dove trascorse i suoi anni più fecondi. Il periodo, purtroppo, fu offuscato dalla mancanza di comprensione e di riconoscimento da parte dei suoi contemporanei. Si racconta che nel 1904, nel corso di una visita a Berkeley (dove all'epoca vigeva il proibizionismo), fece entrare di nascosto una bottiglia di vino nel Club dei Docenti. Boltzmann si suicidò all'età di 62 anni.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f =$$

$$\int d\Omega \int d\mathbf{v}_1 \sigma(\Omega) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| (f' f'_1 - f f_1)$$

una particella con una certa velocità e una certa quantità di moto non ha nulla di casuale, ed è proprio questa distribuzione che deve obbedire ad alcune equazioni di natura fondamentale. È chiaro, ad esempio, che in un gas le molecole non se ne stanno tutte ammucchiate in un posto solo, ma si distribuiscono in maniera più o meno uniforme nello spazio disponibile. Le collisioni tra le molecole, inoltre, fanno sì che una volta che il sistema ha raggiunto l'equilibrio, anche la sua energia sia distribuita con una certa uniformità. L'importanza dell'equazione di Boltzmann sta anche nella sua capacità di descrivere sistemi non in equilibrio, permettendo, ad esempio, di dimostrare che un certo processo tende all'equilibrio.

Per essere più precisi, l'equazione di Boltzmann descrive l'evoluzione temporale della funzione di distribuzione $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ che specifica la probabilità di trovare una particella nella posizione $\mathbf{r}$ con una velocità $\mathbf{v}$ a un certo istante t in un gas, in un fluido o in un plasma. L'equazione contiene derivate rispetto a tutte le variabili – tempo, spazio e velocità – da cui dipende la funzione f . Il primo membro dell'equazione descrive la variazione temporale della distribuzione a causa del flusso libero del fluido – in altre parole, a causa della velocità delle particelle che compongono il sistema e della forza esterna che può essere applicata a quest'ultimo. L'espressione complicata del secondo membro è una rappresentazione approssimata dell'effetto che le collisioni tra le particelle hanno sulla variazione della funzione di distribuzione. Tale interazione dipende dalla velocità relativa e dalla sezione d'urto di diffusione σ , la quale dipende, a sua volta, dall'angolo di diffusione relativo Ω . Non ci dilungheremo qui sui dettagli del suo aspetto complicato.

Per farsi un'idea di cosa significhi questa funzione di distribuzione, dall'apparenza così astratta, possiamo utilizzarla per definire dei valori medi da cui ottenere quantità fisiche più familiari. Se integriamo

Proprietà emergenti

L'acqua è fatta da tantissime molecole che interagiscono tra di loro. Questa grandissima entità collettiva manifesta una serie di proprietà fantastiche: onde, vortici, eccetera. Si tratta di proprietà del mezzo che i costituenti del mezzo non possiedono. Le molecole d'acqua non hanno la più pallida idea di cosa sia un'onda fatta d'acqua! Stiamo parlando, quindi, di proprietà emergenti. Gli elementi strutturali invisibili a occhio nudo sono molti, e ciò significa, di fatto, che esiste un'intera gerarchia di fenomeni emergenti. Vale la pena sottolineare, comunque, che non stiamo parlando, a nessun livello, di interazioni o effetti aggiuntivi: i fenomeni emergenti non sono altro che il risultato di un'interazione tutt'altro che banale tra i gradi di libertà fisici sottostanti e le forze fondamentali in azione tra questi ultimi. Le prove che anche la vita sia un fenomeno emergente sono sempre più numerose.

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}$$

$$f(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2}{2kT}}$$

la funzione su tutte le velocità, ad esempio, otteniamo la «densità numerica» $n(\mathbf{r}, t)$ delle particelle, che dipende solo dallo spazio e dal tempo. La densità numerica ci dà la probabilità di trovare una particella nella posizione $\mathbf{r}$ all'istante t , indipendentemente dalla sua velocità.

Esiste un caso semplice in cui la soluzione che si ottiene per la funzione di distribuzione riveste un'importanza particolare. Se partiamo dall'ipotesi che il sistema sia in equilibrio, allora la distribuzione è, per definizione, indipendente dal tempo e omogenea (ovvero indipendente dalla posizione); se alla prima ipotesi aggiungiamo quella che non siano presenti forze esterne, allora il primo membro dell'equazione di Boltzmann sarà nullo per qualsiasi funzione che dipenda esclusivamente dalla velocità. Il secondo membro, in linea generale, è nullo solo se f dipende in un modo ben preciso da qualsiasi quantità conservata nel corso di un processo di collisione, come la massa, la quantità di moto o l'energia. Partendo da queste ipotesi, Maxwell diede una soluzione esplicita per la distribuzione delle velocità $\mathbf{v}$ intorno al valore medio $\mathbf{u}$ in un sistema all'equilibrio. Si tratta di una distribuzione gaussiana: una funzione simmetrica e abbastanza stretta, con un picco a $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ e in rapida diminuzione non appena $\mathbf{v}$ si allontana da $\mathbf{u}$. Partendo da tutte queste ipotesi, Boltzmann costruì l'espressione (già ottenuta da Maxwell con un ragionamento diverso) per la distribuzione delle velocità $\mathbf{v}$ intorno al loro valore medio $\mathbf{u}$ in un sistema all'equilibrio.

La fluidodinamica descrive il flusso di mezzi continui come i gas, molti tipi di fluidi e i plasmi. Trova uso nelle simulazioni al computer, per ottimizzare la stabilità e la resistenza di navi, aeroplani e macchine sportive in fase di progettazione. Le sue equazioni, inoltre, sono impiegate nelle previsioni del tempo, in particolar modo nella simulazione di uragani, tornado e tsunami.

Le tre equazioni della fluidodinamica sono, in sostanza, equazioni di conservazione. Contenendo un numero limitato di parametri, sono in grado di descrivere un'ampia gamma di fenomeni di trasporto. Anche se in origine furono dedotte dallo studio dei fluidi, è possibile anche ottenerle dalle equazioni di Boltzmann attraverso l'analisi dei valori medi di grandezze che si conservano nelle collisioni a due corpi: la massa, la quantità di moto e l'energia.

Uno dei maggiori problemi che i fisici e i matematici non hanno ancora risolto è la comprensione dettagliata del fenomeno della *turbolenza* a partire dai principi primi e la sua costruzione come soluzione delle equazioni di Navier-Stokes.

Le equazioni di Navier-Stokes si fondano sulla conservazione di tre quantità fondamentali nelle interazioni tra particelle: la massa, la quantità di moto e l'energia. Ad ognuna di queste è associato un campo: la densità di massa $\rho(\mathbf{r}, t)$, il campo delle velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ e la densità di energia (per unità di massa) $\epsilon(\mathbf{r}, t)$. Le equazioni presuppongono che si conoscano le equazioni di stato del mezzo che si sta analizzando, cioè quella che lega la pressione alla densità e alla temperatura, $P = P(\rho, T)$, e quella che lega la densità di ener-

La fluidodinamica

Le equazioni di Navier-Stokes

Navier e Stokes

I problemi relativi ai fluidi erano già stati presi in considerazione da Newton e da Bernoulli, ma fu il matematico svizzero Leonhard Euler, noto come Eulero (1707-1783) a porre le basi della fluidodinamica, grazie a un'analisi sistematica delle sue equazioni, realizzata intorno al 1755. L'aver dedicato a Eulero l'equazione che descrive il moto di un fluido non viscoso è un giusto riconoscimento nei confronti di quello che viene spesso considerato come il fondatore della fluidodinamica moderna.

Francese, figlio di un avvocato, Claude-Louis Navier (1785-1836), rimase orfano di padre a soli 8 anni. Venne affidato a uno zio, ingegnere civile, che cercò di suscitare in lui l'interesse per l'ingegneria e lo convinse a iscriversi all'École Polytechnique: l'inizio non fu dei più promettenti, ma nel giro di due anni Navier diventò uno degli studenti migliori. Nel 1804 fu ammesso all'École des Ponts et Chaussées, dove si

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{1}{\rho} \nabla \left(P - \frac{\eta}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \epsilon = - \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{K}{\rho} \nabla^2 T$$

gia alla densità e alla temperatura, $\epsilon = \epsilon(p, T)$. Nel caso di sistemi gassosi diluiti, questi campi sono definiti come valori medi rispetto alle velocità, ottenuti attraverso la funzione di distribuzione di Boltzmann (come si può vedere qui a fianco). In tal modo, le espressioni che definiscono i campi dipendono solo da $\mathbf{r}$ e da t . A questo punto ci si può servire dell'equazione di Boltzmann per derivare l'insieme di equazioni accoppiate di cui sopra, chiamate solitamente equazioni di Navier-Stokes.

Si tratta di un insieme di equazioni assolutamente generico, che in teoria può essere utilizzato anche in aerodinamica, anche se i parametri saranno molto diversi. Le equazioni contengono diverse approssimazioni, ottenute attraverso l'introduzione di alcuni parametri fenomenologici che caratterizzano il fluido, tra cui un tensore di pressione P , la viscosità η e la conducibilità termica K . Per semplicità abbiamo ommesso dalla terza equazione un contributo dipendente dalla viscosità.

Si noti come la prima equazione, in realtà, non sia altro che l'equazione di continuità del fluido. Nel caso della seconda equazione, se la viscosità è nulla, si ritrova l'equazione originale di Eulero. Quello che si impara ricavando questo sistema fenomenologico di equazioni macroscopiche a partire dall'equazione di Boltzmann è che gli stessi parametri fenomenologici possono essere visti come valori medi rispetto ad alcuni gradi di libertà microscopici e che, almeno in linea di principio, le correzioni possono essere calcolate in maniera sistematica.

Come possiamo vedere, le equazioni hanno una forma piuttosto complessa: eppure non sono altro che l'espressione di un insieme di leggi di conservazione abbastanza semplici, applicate a un sistema a molti corpi. I primi membri rappresentano il trasporto dovuto alla convezione libera del flusso. A destra, invece, troviamo gli effetti delle

laureò due anni dopo. Acquistò una grande fama grazie alla costruzione di ponti, anche se si dice che la sua prima opera crollò.

Oggi ricordiamo Navier per le equazioni che ne portano il nome: a quanto pare, giunse al risultato corretto nel 1822, ma con un ragionamento sbagliato. Nel 1831 divenne professore all'École Polytechnique. Molto impegnato sul piano politico, credeva nei benefici dell'industrializzazione della società, e si oppose agli spargimenti di sangue della Rivoluzione francese e all'espansionismo militare napoleonico. George Gabriel Stokes (1819-1903) era figlio del rettore dello Sligo College a Skreen, in Irlanda. Studiò a Cambridge e divenne il membro più anziano di un gruppo di fisici teorici di fama, di cui facevano parte anche W. Thomson (Lord Kelvin) e Lord Rayleigh. Stokes occupò la cattedra Lucasiana e fu presidente e segretario della Royal Society (mantenendo il secondo dei due incarichi per più di trent'anni). I suoi lavori più importanti sono quelli relativi alla fluidodinamica.

tensioni e della viscosità, che inducono nel gas un comportamento diffusivo complesso da cui può nascere un flusso turbolento.

Le equazioni possono essere utilizzate per descrivere il modo in cui un fluido scorre in un tubo, in un fiume, attorno a una nave o sulle ali di un aeroplano. In alcuni casi particolari è possibile semplificarle notevolmente. Nel caso di un fluido stazionario, ad esempio, si ritrova facilmente l'equazione di Bernoulli che mette in relazione la pressione e la velocità, così come è facile ricavarne l'equazione che descrive la propagazione delle onde sonore, dato che queste non sono altro che onde di densità longitudinali. Se si annulla il campo delle velocità $\mathbf{u}$, inoltre, l'equazione dell'energia si riduce in pratica all'equazione di diffusione del calore.

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} = mn(\mathbf{r}, t)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = m \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \epsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} m \int |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}$$

Einstein pubblicò la sua teoria della relatività ristretta nel 1905, e la teoria generale della relatività, che vedremo nel prossimo capitolo, una decina di anni dopo. La relatività ristretta descrive come cambia la percezione dello spazio e del tempo in funzione del moto dell'osservatore. La nozione di tempo assoluto presente nella concezione newtoniana della natura si era rivelata insostenibile, soprattutto nel caso in cui la velocità degli oggetti osservati fosse prossima a quella della luce.

Le equazioni presentate in questo capitolo mettono in evidenza tre conseguenze fondamentali. Innanzitutto, il fatto che le velocità si sommano in un modo speciale, per cui diventa impossibile raggiungere la velocità della luce. Il limite di velocità è universale, nel senso che è lo stesso per qualsiasi osservatore. In secondo luogo, gli orologi in movimento risultano rallentati, a dimostrazione del fatto che il tempo è relativo. Infine, abbiamo l'equazione più famosa di tutta la fisica del XX secolo, quella che esprime la fondamentale equivalenza tra massa ed energia.

La relatività ristretta si basa su due postulati fondamentali che riguardano due o più osservatori che si muovono a velocità relativa costante, i cosiddetti «osservatori inerziali». Il primo postulato afferma che le leggi fisiche devono essere le stesse per tutti gli osservatori inerziali – le equazioni devono avere lo stesso identico aspetto per ognuno di loro. Il secondo postulato afferma che la velocità della luce (nel vuoto) è la stessa per tutti gli osservatori inerziali.

Il primo postulato non dovrebbe sorprendere: si tratta del postulato di relatività, e non è poi così nuovo. Era già stato formulato da Galileo in maniera abbastanza esplicita. In parole povere, se qualcuno effettuasse un esperimento per studiare le leggi fisiche trovandosi su un treno che viaggia a velocità costante, e se io facessi lo stesso esperimento stando fermo a terra, le leggi fisiche ottenute sarebbero le stesse. Significa che

La relatività ristretta

La cinematica relativistica

Albert Einstein

Nacque a Ulm, in Germania, il 14 marzo 1879. Iscrittosi al Luitpold Gymnasium di Monaco, ebbe difficoltà ad accettare l'atmosfera militaristica della scuola. Quando la sua famiglia si trasferì a Milano, andò a studiare ad Aarau, in Svizzera, e nel 1896 fu ammesso al Politecnico di Zurigo; la sua speranza era quella di diventare insegnante di fisica e di matematica.

Nel 1901, l'anno del diploma, Einstein ottenne la cittadinanza svizzera. Non riuscendo a trovare lavoro come insegnante, accettò un posto da assistente tecnico all'Ufficio Brevetti svizzero. Nel tempo libero si cimentava con problemi di fisica teorica. Nel 1905 ottenne il dottorato e nello stesso anno pubblicò negli *Annalen Der Physik* tre lavori fondamentali su tre problemi completamente diversi: l'effetto fotoelettrico, il moto browniano e la relatività ristretta. Dopo sette anni passati all'Ufficio Brevetti, fu nominato libero docente a Berna e nel

$$w = \frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$E = mc^2 = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

se state viaggiando a velocità costante rispetto a qualcun altro, non esiste un criterio oggettivo per decidere chi si sta muovendo e chi sta fermo. È qualcosa che forse avrete già sperimentato stando su un treno che si muove lentamente. Il concetto di moto è relativo.

Il secondo postulato è decisamente più sorprendente e, anche una volta che lo si è capito, continua a essere tutt'altro che intuitivo. È una conseguenza delle equazioni di Maxwell per la propagazione delle onde luminose. Immaginate di trovarvi su un treno che viaggia a velocità u , e di lanciare una palla con velocità v nella stessa direzione di u verso una persona che si trova sul marciapiede che costeggia il binario. La nostra esperienza di tutti i giorni, ovvero ciò che ci piace chiamare «senso comune», ci porterebbe a dire che la persona sul marciapiede riceverà la palla con una velocità w corrispondente alla somma delle due velocità: $w = u + v$. Si tratta proprio della conclusione cui sarebbe giunto Newton. Se però al posto della palla prendiamo una particella luminosa – un fotone – allora il secondo postulato di Einstein ci dice semplicemente che il fotone, in moto rispetto al treno alla velocità della luce, si muoverà esattamente con la stessa velocità anche per la persona sul marciapiede. Che strano! La risposta di Einstein alla domanda su come si debbano «sommare» due velocità (nella stessa direzione) è data dalla prima delle tre equazioni. Si tratta, in realtà, di una formula algebrica piuttosto semplice. Si noti come se ne possano dedurre immediatamente alcuni casi particolari. Innanzitutto, se sia u che v sono molto piccole rispetto alla velocità della luce, il termine uv/c^2 diventa molto più piccolo di 1, e la formula di Einstein si riduce a quella di Newton: $w = u + v$, come ci si poteva aspettare. Nel caso in cui $u = c/2$ e $v = c/2$, invece, la prima formula di Einstein ci dice che $w = 4c/5$. Infine, se $v = c$, allora anche w vale c per qualsiasi valore di u , così come è richiesto dal secondo postulato.

La formula ci dice qualcosa di molto importante sulle velocità. Osservate come, anche continuando a sommare un numero arbitrario di velocità minori o uguali a c , non si riesca mai a ottenere una ve-

1909 divenne professore associato a Zurigo. Nel 1911 ottenne un incarico come professore di fisica teorica a Praga, ma quello stesso anno tornò a Zurigo per occupare un posto analogo. Nel 1914 fu nominato direttore del Kaiser Wilhelm Physical Institute di Berlino, nonché professore nell'università di quella città. Sempre nel 1914, divenne cittadino tedesco; rimase a Berlino fino al 1933, quando rinunciò alla cittadinanza per ragioni politiche abbastanza ovvie. Einstein ricevette il premio Nobel per la fisica nel 1921 «per i suoi contributi alla fisica teorica e, in particolar modo, per la scoperta delle leggi che governano l'effetto fotoelettrico»; è curioso che non fu il suo lavoro sulla relatività a essere premiato.

Se nel 1901 Einstein era stato sul punto di rinunciare alle proprie ambizioni accademiche, nel 1933 ricevette offerte di lavoro da molti posti: Gerusalemme, Leida, Oxford, Madrid e Parigi. La sua scelta cadde sugli Stati Uniti, dove gli era stato offerto un incarico all'Institute for Advanced Study di Princeton. Nel 1940 divenne

cittadino americano e cinque anni dopo andò in pensione. A Princeton si occupò soprattutto della possibilità di unificare l'elettromagnetismo e la gravitazione in una teoria di tipo geometrico.

Se Einstein dovette pagare un prezzo per il suo genio, fu la solitudine intellettuale che caratterizzò la sua vita, attenuata in parte dalla musica, che per lui ebbe sempre una grande importanza. Nel 1903 sposò Mileva Maric, da cui ebbe tre figli, una femmina e due maschi. I due divorziarono nel 1919, ed Einstein si risposò con sua cugina, Elsa Löwenthal, che morì nel 1936.

Einstein non nascose mai le proprie posizioni pacifiste; nell'ultima lettera scritta prima di morire, indirizzata a Bertrand Russell, aderì al manifesto che invitava tutte le nazioni ad abbandonare la corsa alle armi nucleari.

Einstein fu cremato a Trenton, nel New Jersey, alle quattro del pomeriggio del 18 aprile 1955. Le sue ceneri furono disperse in un luogo segreto.

lità maggiore di c ! Sembra proprio che la velocità della luce sia la massima velocità consentita in natura e che, giustamente (per il secondo postulato) tale massimo sia lo stesso per tutti gli osservatori. Per quanto ne sappiamo, si tratta di un limite di velocità che la natura rispetta senza eccezioni.

Questo limite assoluto sulla velocità si applica necessariamente anche a tutti i modi che possiamo immaginare per trasferire informazione: si tratta di un elemento cruciale per la salvaguardia di un concetto importantissimo, quello di causalità – il rapporto di causa ed effetto – fondamentale non solo per la scienza, ma anche per la vita quotidiana. Se si potessero ottenere velocità di propagazione superiori a quelle della luce, diventerebbe possibile cancellare azioni commesse in passato, con conseguenze completamente assurde e inaccettabili. Certo, sarebbe bellissimo poter prevenire *a posteriori* un incidente già accaduto, ma è anche molto difficile credere in un miracolo del genere.

Qualcuno potrebbe chiedersi com'è possibile che la velocità della luce sia la stessa per tutti gli osservatori. In effetti, il prezzo da pagare è piuttosto alto. Ricordiamoci che la velocità è data dallo spazio diviso per il tempo, ed è proprio questo che ci fa capire come vanno le cose. Affinché la velocità della luce sia la stessa per tutti gli osservatori, bisogna ridefinire le relazioni tra le loro nozioni di spazio e di tempo. In particolare, è l'idea newtoniana di tempo assoluto a dover essere abbandonata. Dato che la separazione tra ciò che chiamiamo spazio e ciò che chiamiamo tempo dipende da come ci muoviamo, è più sensato parlare di spazio-tempo anziché di spazio e di tempo presi separatamente. Lo spazio-tempo è l'insieme di tutti i punti spazio-temporali (x, t) o, per usare un termine che piace molto ai fisici, di tutti gli «eventi».

Le differenze nella percezione dello spazio-tempo da parte di osservatori diversi sono definite completamente dalla teoria di Einstein. L'aggettivo «relativo» significa che non tutti gli osservatori vedono allo stesso modo gli eventi e l'ordine con cui accadono, ma che la teoria ci con-

sente di determinare quali sono le differenze e da dove nascono. Un'altra conseguenza importante della teoria è il fatto che un orologio in movimento segna il tempo più lentamente: è da qui che nasce il famoso «paradosso dei gemelli». Il messaggio della seconda equazione è proprio questo: t' è il tempo misurato dall'orologio in movimento, mentre t è quello misurato dall'orologio che rimane fermo. La formula ci dice che t' è sempre minore di t (perché la radice quadrata è sempre minore di 1). Se un gemello resta a casa e l'altro parte a gran velocità per un lungo viaggio interplanetario, quest'ultimo, al suo ritorno a casa, scoprirà di essere molto più giovane dell'altro. La previsione è stata verificata più volte, anche se forse non con un vero gemello in viaggio nello spazio. Una dimostrazione sperimentale molto chiara di tale effetto, ad esempio, è quella fornita dalla misura delle vite medie di particelle instabili prodotte a velocità diverse. Particelle prodotte con velocità più alte vivono più a lungo, in accordo con l'equazione di Einstein. In maniera analoga, a un osservatore in quiete, gli oggetti in movimento appaiono più corti nella direzione del moto.

Veniamo ora a quella che probabilmente è l'equazione più famosa di tutta la fisica del Novecento: $E = mc^2$. In realtà oggi si preferisce presentarla in maniera un po' diversa, perché la stessa m della formula di Einstein è una quantità che dipende dallo stato di moto rispetto all'osservatore. Ciò che intendiamo solitamente come massa di un oggetto è la massa che misuriamo quando quest'ultimo è fermo. Il termine «massa», quindi, si riferisce alla massa a riposo m_0 . Nell'ultima parte della formula, l'energia è stata riscritta in termini della massa a riposo e della quantità di moto p (e di c), consentendoci di illustrare due proprietà interessanti della dinamica di una particella relativistica. Se la quantità di moto è nulla, l'energia non è altro che la massa a riposo m_0 moltiplicata per c^2 , a dimostrazione del fatto che una particella racchiude una quantità di energia enorme anche quando è ferma. Tanto per darvi un'idea, significa che un chilogrammo di ma-

Maxwell contro Newton

Vorrei fare un'ultima osservazione sul primo postulato della relatività. Il fatto che le leggi di natura dovessero avere lo stesso aspetto per tutti gli osservatori inerziali, di fatto, era già in contraddizione con le due grandi teorie classiche: le leggi di Newton e le equazioni di Maxwell. Esiste una regola per esprimere le coordinate spaziali e temporali di un osservatore in termini delle coordinate di un altro osservatore: è la cosiddetta «trasformazione di coordinate», che dipende dalla velocità relativa dei due osservatori. Se si utilizza una trasformazione che lascia invariate

le equazioni di Newton, le equazioni di Maxwell cambiano, mentre se si sceglie una trasformazione che lasci invariata la forma delle equazioni di Maxwell, sono le equazioni di Newton a non rimanere più le stesse. La teoria di Einstein risolse il conflitto tra i due dogmi sacri della fisica classica: le trasformazioni che lasciavano invariate le equazioni di Maxwell (le cosiddette trasformazioni di Lorentz) si rivelarono quelle corrette, e la meccanica newtoniana fu spodestata, sopravvivendo solo come caso limite della meccanica relativistica einsteiniana, dimostratasi molto più potente.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

teria di qualsiasi tipo contiene circa 10^{17} joule di energia, vale a dire la stessa quantità che si ottiene bruciando più di un milione di tonnellate di carbone.

Se si esprime la cosiddetta *massa relativistica* in termini della massa a riposo e della velocità v , si trova un'espressione interessante, utilizzata da Einstein e riprodotta qui a fianco. Da questa formula si possono capire molte cose. Osservate anzitutto come, per $v = 0$, $m = m_0$, come ci si aspetta che sia, mentre quando v tende alla velocità della luce il denominatore tende a zero e il valore di m cresce a dismisura! Ciò spiega, a grandi linee, perché non è possibile far viaggiare una particella a una velocità maggiore di quella della luce: quando v si avvicina a c , la particella diventa infinitamente pesante, e per accelerarla ancora servirebbe una quantità di energia infinita.

Un altro caso interessante della relazione tra l'energia e la massa (la terza equazione) è quello in cui la massa a riposo m_0 è nulla. La relazione che otteniamo ci dice che, nel caso di particelle prive di massa, l'energia è proporzionale alla quantità di moto: $E = pc$. Come avremo modo di apprezzare più avanti, quando parleremo di teoria dei quanti, non c'è nulla di irragionevole nel parlare di particelle prive di massa. Intorno a noi ne circolano quantità enormi sotto forma di fotoni, le particelle di luce che costituiscono i quanti della radiazione elettromagnetica. L'espressione per l'energia delle particelle a massa nulla implica che queste devono muoversi alla velocità della luce – è impossibile fermarle.

Le equazioni della relatività ristretta esprimono concetti rivoluzionari con una semplicità sconcertante. Ci insegnano che, quando abbiamo a che fare con velocità prossime a quelle della luce, la natura si comporta in maniera totalmente differente. La ragione per cui non ce ne siamo accorti prima, ovviamente, è che non avevamo mai avuto modo di confrontarci con velocità del genere; oggi, invece, i grandi acceleratori fanno raggiungere alle particelle elementari velocità che differiscono dal limite assoluto c per meno di una parte su un milione.

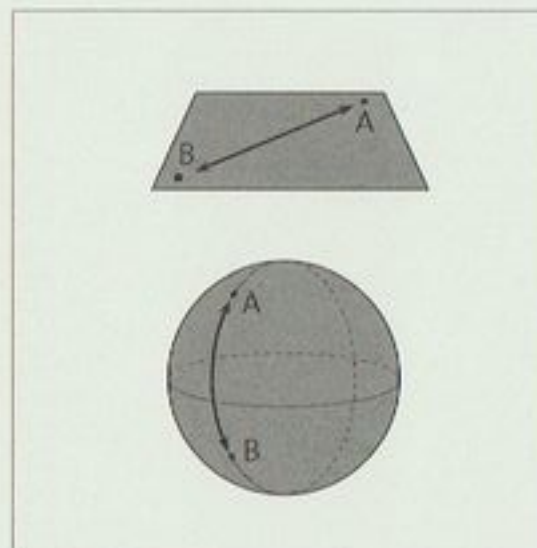
Einstein si era chiesto che cosa significasse l'equivalenza tra osservatori sottoposti a un'accelerazione. Per rispondere intraprese un percorso solitario che lo portò, dopo dieci anni di duro lavoro, dalla «relatività ristretta» a quella teoria stupefacente detta comunemente «relatività generale», nella quale le idee di spazio, tempo e gravità si intrecciano in maniera inscindibile.

Il fenomeno della gravitazione è una conseguenza diretta della curvatura dello spazio-tempo. L'energia e la quantità di moto curvano lo spazio-tempo e la curvatura dello spazio-tempo condiziona il moto della materia e della radiazione. Einstein «liberò» lo spazio-tempo dal suo ruolo di arena immutabile in cui hanno luogo gli eventi fisici. Da spettatore passivo, lo spazio-tempo divenne attore e si trovò coinvolto nella dinamica dei processi fisici. La relatività generale permise di dare una spiegazione a molti fatti sperimentali che la teoria newtoniana non era riuscita a descrivere; inoltre, prevede l'esistenza di fenomeni incredibili, come i buchi neri e, soprattutto, aprì la porta a una visione dinamica totalmente nuova del nostro Universo.

È capitato a tutti di trovarsi in un ascensore che sta accelerando verso l'alto o verso il basso. Quando state accelerando verso l'alto ve ne rendete conto perché vi sentite più pesanti. Se l'accelerazione è verso il basso, invece, vi sentite più leggeri. Ora, immaginate che qualcuno tagli i cavi dell'ascensore e che questo cominci a precipitare in caduta libera. Ogni cosa presente nell'ascensore diverrà «senza peso»: se vi sfuggisse un oggetto dalle mani, non cadrebbe sul pavimento, ma si limiterebbe a muoversi insieme a voi. La conclusione che possiamo trarre da tutte queste osservazioni è che una teoria della relatività

La relatività generale

Le equazioni di Einstein



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$$

per osservatori sottoposti ad accelerazione dovrebbe tenere conto della gravità. Essendo privo di peso, l'osservatore in caduta libera avrebbe un ruolo cruciale: per lui, o per lei, la gravità non esisterebbe. Einstein ebbe l'idea fondamentale nel 1907, quando formulò il *principio di equivalenza*, il quale postula che l'accelerazione gravitazionale è indistinguibile dall'accelerazione dovuta a forze meccaniche. La massa gravitazionale dell'equazione gravitazionale di Newton veniva quindi a coincidere con la massa inerziale (quella della ben nota formula newtoniana $F = ma$). Fino ad allora l'equivalenza era sempre stata un'asserzione fenomenologica e non una necessità logica o un principio fondamentale.

Rispetto agli osservatori accelerati va fatta un'ulteriore osservazione. Provate a immaginare un raggio luminoso: per definizione, la sua traiettoria da un punto a un altro è rettilinea, poiché si tratta del cammino più breve tra i due punti. Se descriviamo quella linea nel sistema di riferimento di un osservatore che si muove con un'accelerazione costante, però, il raggio luminoso risulterà muoversi secondo una parabola, la cui curvatura (che nel caso di una parabola è costante) coinciderà con l'accelerazione gravitazionale, ovvero con il campo gravitazionale. In tal caso, il cammino più corto è curvo, a dimostrazione del fatto che è lo spazio stesso a essere curvo. Ciò che Einstein aveva quindi scoperto era, da un lato, una relazione tra l'accelerazione e la gravità e, dall'altro, una relazione tra l'accelerazione e la curvatura dello spazio: a questo punto, l'identificazione della gravità con la curvatura dello spazio-tempo era inevitabile.

Per immaginare cosa sia uno spazio curvo, può essere utile passare da tre a due dimensioni. Confrontiamo la superficie di un piano, piatta, e quella di una sfera, curva (si vedano le figure di pagina 64). Quest'ultima è effettivamente una superficie a curvatura costante, perché il modo in cui si curva è lo stesso in ogni punto e in ogni dire-

Sette predizioni

La precessione del perielio. La forza tra due masse, ad esempio il Sole e uno dei pianeti, differisce dalla legge newtoniana dell'«inverso del quadrato» per una serie di termini piccolissimi. Per quanto piccoli, però, questi fanno sì che l'asse maggiore dell'orbita ellittica del pianeta non sia più fissa nello spazio, ma ruoti essa stessa molto, molto lentamente intorno al Sole. Per il pianeta più vicino al Sole, Mercurio, la precessione è approssimativamente di 43 secondi d'arco per secolo. Le osservazioni sono in perfetto accordo con la teoria.

La curvatura della luce. La curvatura dello spazio-tempo ha effetto sui raggi luminosi (attraverso la forza di gravità). Con la teoria di Newton questo non succede. Ci si aspetta che i raggi luminosi che passano vicino a un oggetto molto pesante vengano deflessi. La conferma giunse nel 1919, durante un'eclissi di Sole. Al passaggio in prossimità del Sole, la luce proveniente da alcune stelle distanti risultò deviata, provocando uno spostamento apparente della loro posizione rispetto alle

altre stelle. Ancora più spettacolare è l'effetto di «lente gravitazionale», dove la curvatura elevatissima genera immagini multiple di galassie lontane.

Il red shift gravitazionale. In un campo gravitazionale, la luce può acquistare o perdere energia. Ciò non vuol dire che può muoversi più lentamente o più velocemente, ma che la sua frequenza diminuisce (red shift o spostamento verso il rosso) o aumenta (blue shift, spostamento verso il blu). È un effetto che ha avuto un ruolo molto importante nella scoperta dell'espansione dell'Universo.

L'espansione dell'Universo. Le equazioni che descrivono i cambiamenti dello spazio-tempo dovrebbero valere anche per lo spazio-tempo nel suo complesso. La teoria di Einstein determina per l'appunto la dinamica dell'Universo. Nel 1922, il matematico russo Aleksandr Friedmann pubblicò sulla rivista «Zeitschrift für Physik» una famiglia di soluzioni che corrispondevano a universi in espansione, e nel 1929 Edwin Hubble fece una scoperta fantastica: l'Universo si espandeva davvero.

zione. Su una sfera, in effetti, il cammino più breve tra due punti è curvo – è un arco di circonferenza.

Dato che la materia genera un campo gravitazionale, Einstein ne dedusse che la massa dovesse incurvare lo spazio-tempo circostante. In due dimensioni, la presenza di una massa deformerebbe lo spazio piatto provocandovi un avvallamento, analogamente a quanto accadrebbe nel caso di un foglio di gomma su cui venga appoggiato un corpo.

Le equazioni di Einstein descrivono con esattezza le relazioni che abbiamo appena descritto. Nel primo membro, i campi $R_{\mu\nu}(x, t)$ rappresentano le componenti della curvatura nelle varie direzioni spazio-temporali per ogni punto dello spazio-tempo; il secondo membro, invece, contiene un campo a più componenti, $T_{\mu\nu}(x, t)$ che descrive la densità spazio-temporale di energia e di quantità di moto. Gli indici μ e ν sono indici spazio-temporali, e possono valere 0, 1, 2 o 3, dove il valore zero corrisponde alla componente temporale. A sinistra, quindi, troviamo tutte le informazioni relative alla geometria dello spazio-tempo e a destra quelle sulla distribuzione di materia e di energia. Il termine contenente la cosiddetta «costante cosmologica» A può essere scritto a sinistra o a destra, a seconda dell'interpretazione che gli si vuole dare. Da un lato, la materia e l'energia determinano la curvatura dello spazio-tempo; dall'altro, la curvatura dello spazio-tempo è come la forza gravitazionale e quindi determina come si muovono tutte le particelle, compresa la luce.

Il punto cruciale è che lo spazio-tempo non è solo curvo, ma anche dinamico, il che è ancora più importante perché significa che non si tratta esclusivamente dell'arena matematica in cui ha luogo la fisica: lo spazio-tempo stesso è uno degli attori e partecipa ai processi dinamici proprio come gli altri gradi di libertà fisici.

Per capire meglio la svolta radicale impressa dalle equazioni di Einstein alla nostra conoscenza dei fondamenti della gravitazione può essere utile un'altra analogia che stavolta, però, non avrà le sembianze di uno spazio-tempo curvo. Nei capitoli sull'elettromagnetismo abbiamo visto come la legge che descrive la forza attrattiva o repulsiva tra due cariche puntiformi sia molto simile a quella formulata da Newton per l'attrazione gravitazionale tra due masse puntiformi. Abbiamo poi assistito all'emergere di campi elettrici e magnetici, non solo come astrazioni matematiche utili per calcolare le forze tra le cariche, ma come gradi di libertà fisici indipendenti che devono obbedire a un sistema di equazioni ben preciso, le equazioni di Maxwell. Le soluzioni di tali equazioni corrispondevano a onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto – alla velocità della luce, per definizione. In questo modo diventava finalmente possibile risolvere un annoso dilemma, che stiamo per illustrare.

Immaginate di prendere una carica elettrica e di farla oscillare: ci aspettiamo che il campo cambi e che la sua variazione possa mettere in movimento una carica situata a grande distanza dalla prima. Secondo la vecchia legge sulla forza elettrica, l'effetto di quest'ultima avrebbe dovuto essere istantaneo; esaminando le equazioni di Maxwell, tuttavia, si vede che la variazione del campo non può propagarsi con una velocità superiore a quella della luce – il che, naturalmente, significa la salvezza per il sacro principio della causalità. Giunto a questo punto, lo stesso Einstein aveva capito benissimo che con la legge di gravità newtoniana si ripresentava lo stesso problema concettuale dell'«azione istantanea a distanza». In altre parole, se con la relatività ristretta Einstein aveva risolto il conflitto tra Maxwell e le equazioni del moto di Newton, il problema con la legge di gravitazione era ancora aperto. Einstein sapeva cosa gli serviva: un sistema di equazioni che svolgesse per il campo gravitazionale lo stesso ruolo

La radiazione gravitazionale. La teoria prevede l'esistenza di onde gravitazionali, provocate dall'intensa accelerazione gravitazionale di corpi massivi, analogamente a quanto capita con le onde elettromagnetiche della teoria di Maxwell. Questa predizione non è stata ancora confermata sperimentalmente; esiste però un prova indiretta molto bella della perdita di energia di una pulsar binaria a causa della radiazione gravitazionale. Le misure che nel 1993 hanno fruttato il Nobel per la fisica a Joseph Taylor e a Russell Hulse, e che ormai coprono un arco di tempo di più di venticinque anni, sono in ottimo accordo con i calcoli basati sulle equazioni di Einstein.

I buchi neri. La teoria doveva riservare ancora delle sorprese. Tra le soluzioni previste, ve ne erano alcune molto speciali, i cosiddetti buchi neri: in un primo tempo, si pensò che la predizione non avesse alcun senso. Da allora, però, le prove indirette dell'esistenza dei buchi neri si sono accumulate. Quando una stella massiva finisce di bruciare tutto il combustibile

nucleare a sua disposizione, si ha una supernova: quest'ultima collassa su se stessa per effetto del proprio peso, dando origine a un buco nero. Sono state osservate supernove con una massa così grande da poter interpretare l'evento solo come la formazione di un buco nero. Si ritiene inoltre che al centro delle galassie si nascondano buchi neri giganti che le ingoiano lentamente.

La costante cosmologica. Vi è infine l'ultimo termine del primo membro, la cosiddetta «costante cosmologica»: Λ . La sua interpretazione odierna è quella di energia del vuoto, e la sua presenza si traduce, di fatto, in una repulsione gravitazionale. Si è capito da poco, e in maniera piuttosto inattesa, che la densità di energia dell'Universo è dominata proprio da questa forma di energia: la conseguenza è un'accelerazione nell'espansione dell'Universo. È un altro punto a favore dei teorici che sostengono che ciò che non è esplicitamente vietato dai principi di una teoria è «obbligatorio», e presto o tardi farà la sua comparsa in natura.

svolto dalle equazioni di Maxwell per l'elettromagnetismo. Le equazioni avrebbero dovuto essere simili, ma certamente non identiche, se non altro per il fatto che la forza gravitazionale tra due masse è sempre attrattiva. Ed è proprio quello che trovò. Il fatto che le sue equazioni consentissero al tempo stesso un'interpretazione geometrica la cui conseguenza era la curvatura dello spazio e del tempo, inoltre, dal suo punto di vista, era un regalo inaspettato e fantastico.

La teoria einsteiniana della gravitazione è una delle opere più eleganti mai realizzate dalla fisica teorica. Ha rappresentato un punto di svolta concettuale di importanza fondamentale e ha dato origine a numerose predizioni veramente notevoli, di portata ben più ampia di quelle della teoria di Newton. Le più importanti sono elencate qui a fianco. Con questa lista impressionante di predizioni, in gran parte verificate da numerosi esperimenti, la relatività generale si distingue come una delle più grandi teorie fisiche mai concepite.

Il primo quarto del XX secolo vide due grandi rivoluzioni scientifiche: la relatività, che cambiò radicalmente la nostra visione dello spazio e del tempo, e la meccanica quantistica, che influi profondamente sulla nostra concezione degli stati della materia e dell'energia. La meccanica quantistica ci ha permesso di capire a fondo un gran numero di fenomeni, dalle proprietà fondamentali delle particelle elementari a vari aspetti della chimica. Con la teoria dei quanti si è aperta una porta sul microcosmo e si sono potute spiegare molte proprietà di classi di materiali molto diverse tra loro, come gli isolanti, i metalli, i semiconduttori e i superconduttori. La fisica moderna non ha ancora finito di trarre vantaggio dalle continue sorprese che ci riserva il mondo della materia quantistica, sia essa solida, liquida o gassosa.

La rivoluzione quantistica rappresentò una scossa violenta per le basi stesse della fisica teorica. Tra le sue cause ci fu l'incapacità delle teorie classiche di Newton e di Maxwell di spiegare le osservazioni sulla struttura degli atomi. Si pensava che l'atomo fosse formato da un nucleo carico positivamente, circondato da un numero di particelle cariche negativamente, gli elettroni, in quantità tale da compensare esattamente la carica del nucleo. Il problema che scatenò la crisi può essere spiegato nel modo seguente. Secondo Newton, nella configurazione proposta gli elettroni avrebbero dovuto «girare» molto rapidamente intorno al nucleo (come in un piccolissimo sistema planetario), e quindi sarebbero stati sottoposti ininterrottamente a una forte accelerazione. Secondo Maxwell, però, una carica sottoposta ad accelerazione deve emettere radiazione, perdendo rapidamente energia: se così fosse, l'elettrone finirebbe ben presto per cadere sul nucleo. Con pochi calcoli si poteva dimostrare che la vita media dell'atomo avrebbe dovuto essere dell'ordine di un milionesimo di se-

La meccanica quantistica

L'equazione di Schrödinger

Erwin Schrödinger

La teoria dei quanti ebbe origine dalla costante introdotta da Max Planck nel 1900 nella sua equazione sulla radiazione. In seguito, Niels Bohr si servì dell'idea delle onde di materia per spiegare gli spettri atomici. Heisenberg affrontò l'argomento servendosi di una tecnica algebrica, la cosiddetta meccanica delle matrici; Erwin Schrödinger, invece, si concentrò sulla formulazione della meccanica ondulatoria. Il primo di quattro articoli dedicati alla famosa equazione apparve negli «Annalen der Physik» nel 1926: Schrödinger vi dimostrava che risolvendo la sua equazione d'onda rispetto agli stati vibrazionali di un atomo se ne poteva ottenere lo spettro. Quando fu nominato successore di Planck, Schrödinger si trasferì da Zurigo a Berlino. Nel 1933 condivise il Nobel per la fisica con Dirac. L'avvento di Hitler al potere, però, lo sconvolse a tal punto da fargli decidere di lasciare la Germania per accettare un

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, t)$$

condo. In base alle conoscenze teoriche dell'epoca, quindi, gli atomi non sarebbero dovuti esistere, in palese contraddizione con le osservazioni sperimentali. Fu a questo punto che venne in aiuto la teoria dei quanti. A ripensarci oggi, possiamo dire che uno dei principali successi della teoria dei quanti fu la sua capacità di spiegare non solo la struttura, ma anche la stabilità degli atomi e delle molecole, cioè di tutta la materia. Dal punto di vista della meccanica quantistica, gli stati legati formati dagli elettroni e dal nucleo di un atomo formano un sistema discreto – dotato, cioè, di uno stato stabile di minima energia e di un insieme di stati accessibili quantizzati.

La teoria si basa su un insieme di postulati molto generali, che forniscono un'impalcatura applicabile a qualsiasi sistema fisico, almeno in linea di principio. In parole povere: il nostro mondo è quantistico. La struttura della meccanica quantistica non deriva in alcun modo dalla fisica classica: è nata, passo dopo passo, dall'incapacità delle teorie classiche di spiegare un certo numero di osservazioni cruciali. La verità è che, in circostanze particolari, si possono derivare le leggi fisiche classiche dalla teoria quantistica, ma non è vero il contrario. La scala alla quale non si può più fare a meno della meccanica quantistica è piccolissima, ed è definita da una costante universale, la costante di Planck: $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js. Spesso, invece di «h», si utilizza la costante «h-tagliato», definita come $h/2\pi$.

Le unità di misura di h sono i Joule moltiplicati per i secondi, ovvero l'energia moltiplicata per il tempo. Significa che l'energia può essere espressa attraverso la costante di Planck divisa per il tempo, oppure – in maniera equivalente – moltiplicata per la frequenza.

L'equazione più importante di tutta la teoria dei quanti è la famosa equazione di Schrödinger, che descrive gli stati fisici di un sistema e la loro evoluzione temporale. In meccanica classica siamo abituati a pensare a una particella come a un punto dotato di una certa massa;

contratto a Oxford. Nel 1934 gli fu offerto un posto permanente all'Università di Princeton, ma rifiutò. Nel 1939 accettò un posto all'Institute for Advanced Studies di Dublino, dove rimase fino all'anno della pensione, nel 1956. Insoddisfatto dell'interpretazione statistica della sua funzione d'onda, Schrödinger cercò di formulare una teoria basata esclusivamente sulle onde, e questo lo portò a scontrarsi con altri fisici di primo piano. Una volta in pensione, tornò a Vienna. Nel 1944 pubblicò un libretto, *Che cos'è la vita?*, in cui proponeva una spiegazione su base molecolare e quantistica del problema della vita, e che divenne fonte di ispirazione per una disciplina che si stava affermando proprio in quel periodo, la biologia molecolare. Schrödinger era solito lavorare da solo: pubblicò più di novanta articoli, ma solo due o tre di questi furono scritti in collaborazione con altri. Morì nel gennaio del 1961, dopo una lunga malattia.

I fotoni: particelle di luce

Se le particelle possono esibire proprietà ondulatorie, è possibile che un'onda si comporti come una particella? La relazione di Einstein, $E = hf$, esprime proprio questa possibilità. La luce di un certo colore (cioè con una certa frequenza) può essere pensata come un fascio di particelle prive di massa (o quanti), i fotoni. In effetti, se usiamo la relazione $E = pc$ (e $c = \lambda f$), valida – come si è visto nel capitolo sulla relatività ristretta – per particelle di massa nulla, la relazione di Einstein e quella di De Broglie si equivalgono. La conclusione che possiamo trarne, quindi, è che la teoria dei quanti, in un certo senso, unifica il concetto di onda e quello di particella, che nella loro accezione classica differiscono totalmente l'uno dall'altro.

lo stato della particella è specificato dalla sua posizione e dalla sua velocità. Data una forza F , o un potenziale $V(x)$ da cui calcolare la forza, le equazioni di Newton ci dicono come si muoverà la particella, cioè come cambieranno nel tempo la sua posizione e la sua velocità. Con la teoria dei quanti le cose cambiano completamente: lo stato del sistema – immaginiamo che si tratti di una particella – è descritto da una funzione d'onda $\Psi(x, t)$, e gli stati accessibili al sistema, così come la loro dinamica, sono governati da un'equazione differenziale cui deve obbedire la funzione d'onda.

Nel caso di una particella libera, non soggetta ad alcuna forza, l'equazione di Schrödinger si riduce all'equazione di un'onda libera, a conferma del fatto che in meccanica quantistica le particelle vengono trattate come onde, e viceversa. Nei primi tempi, infatti, la meccanica quantistica veniva anche chiamata «meccanica ondulatoria». La proprietà fondamentale nota come *dualismo onda-particella* può essere espressa, nella sua forma più elementare, da due semplici relazioni. La prima, che dobbiamo a De Broglie, lega la lunghezza d'onda λ della cosiddetta «onda di materia» alla quantità di moto della particella ($\lambda = h/mv$), mentre la seconda, formulata da Einstein, lega la sua frequenza all'energia della radiazione ($E = hf$). Si noti il ruolo cruciale svolto dalla costante di Planck in entrambe le relazioni.

La presenza, nelle relazioni che definiscono il dualismo onda-particella, di una costante come h , caratterizzata da un valore piccolissimo, fa capire come mai la natura quantistica della materia sia rimasta nascosta per così tanto tempo. Se prendiamo $m = 1$ Kg e $v = 1$ Km/s, la lunghezza d'onda corrispondente sarà $\lambda = 10^{-34}$ m, cioè una lunghezza chiaramente troppo piccola per essere osservata. Tuttavia, se prendiamo un elettrone, con la sua massa infinitesima ($m = 10^{-30}$ kg), e lo facciamo muovere a una velocità abbastanza elevata, allora la lunghezza d'onda può avvicinarsi a valori dell'ordine di 10^{-10} m, paragonabili alle dimensioni di un atomo. In altre parole,

se vogliamo studiare il comportamento degli elettroni in un atomo, dobbiamo fare ricorso a una descrizione quantistica, perché la «lunghezza d'onda» dell'elettrone è dello stesso ordine di grandezza del sistema e cominciano a farsi sentire gli effetti di proprietà tipiche delle onde, come l'interferenza.

Il primo grande successo dell'equazione di Schrödinger, in realtà, fu il calcolo estremamente preciso dello spettro degli stati atomici, grazie al quale fu possibile dimostrare che il sistema formato da un elettrone e da un nucleo possiede uno stato stabile di energia minima; esisteva finalmente una teoria capace di descrivere e di spiegare gli elementi stabili della tavola periodica di Mendeleev.

Una volta che abbiamo la funzione d'onda, cosa sappiamo, e come facciamo a dedurre le proprietà del sistema? L'interpretazione più comune della meccanica quantistica consiste nel dire che il quadrato dell'ampiezza della funzione d'onda non è altro che la *probabilità* di trovare la particella nel punto r all'istante t . A prima vista può sembrare paradossale. Immaginiamo che la soluzione sia un'onda sinusoidale. La sua lunghezza d'onda è ben definita, e quindi, per la relazione di De Broglie, lo è anche la sua quantità di moto. Al tempo stesso, però, la posizione della particella non può essere definita con precisione, dal momento che la funzione d'onda è praticamente non nulla ovunque. La situazione opposta è quella in cui la funzione d'onda è fortemente localizzata, ed è concentrata in un picco intorno a un punto ben preciso. Una funzione d'onda del genere, di solito, descrive una particella situata proprio in quel punto; ora, però, la funzione non ha più una lunghezza d'onda definita, e questo ci impedisce di dire granché sulla sua quantità di moto o sulla sua velocità.

Quanto si è detto finora ha una conseguenza sorprendente su ciò che la teoria dei quanti può dire della realtà fisica: non è possibile conoscere simultaneamente e con precisione la posizione e la velocità di una particella. Il dualismo onda-particella implica un'incertezza sulla

$$\Delta x \Delta p \geq h/4\pi$$

Il dualismo posizione-quantità di moto

Per capire il principio di indeterminazione, faremo ricorso a un'analogia con le onde sonore. Un'onda sonora dotata di un'unica frequenza (o lunghezza d'onda) corrisponde a un tono puro, molto simile allo stato di una particella dotata di una quantità di moto ben precisa. Per determinare con precisione l'altezza del tono dobbiamo ascoltarlo per un certo periodo di tempo, che deve ricoprire varie oscillazioni. Se ne deduce che un tono puro non è molto ben «localizzato temporalmente». Se applaudo, invece, produco un suono molto breve, e quindi molto ben localizzato temporalmente. Tuttavia, se voglio sapere a che tono corrisponde, allora l'affermazione più corretta consiste nel dire che il suono conterrà tutte le frequenze, o i toni. A quanto pare non si possono avere le due cose insieme.

posizione Δx , e un'incertezza sulla quantità di moto Δp ; insieme, le due quantità devono soddisfare il principio di indeterminazione di Heisenberg, riportato nella pagina precedente: il loro prodotto non può essere minore del già piccolissimo $h/4\pi$.

Sotto questo aspetto, la meccanica quantistica sembra ridimensionare le ambizioni e le aspettative della fisica classica, per la quale la natura era totalmente prevedibile anche a livello fondamentale. La predicibilità, però, richiede la conoscenza simultanea – e precisa a piacere – della posizione e della velocità di una particella, ed è proprio questo che viene escluso a priori dal principio di indeterminazione. Se sappiamo con esattezza dove si trova una particella in un certo momento, ma non sappiamo nulla a proposito della sua velocità, allora è ovvio che non potremo dire dove si troverà la particella nell'immediato futuro. La relazione di Heisenberg dovrebbe spingerci a parlare di «incertezza certa».

L'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica ha dato vita a dispute accanite fin dal giorno in cui ha visto la luce. In particolare, è capitato che l'incertezza implicata dalla teoria venisse percepita come il segno di una sua incompletezza di fondo. È stata suggerita l'esistenza di *variabili nascoste*, ma la loro presenza è stata esclusa da un teorema di John Bell e dalla sua verifica sperimentale. Da un punto di vista più filosofico, l'incredibile quantità di prove sperimentali può essere condensata nell'affermazione che dobbiamo accettare la visione probabilistica come una proprietà fondamentale della natura, con la conseguenza che certe domande – ad esempio, qual è la velocità di una particella perfettamente localizzata – sono semplicemente prive di senso. Finora, pur con tutti i suoi aspetti anti-intuitivi, la teoria dei quanti è forse la teoria della natura che ha avuto più successo tra tutte quelle che conosciamo. E, come vedremo nel prossimo capitolo, i suoi postulati sono validi ovunque in natura, fino ai livelli più elementari.

L'equazione di Schrödinger aveva un grosso limite: non era compatibile con la relatività. L'equazione di Dirac risolse il problema, unificando i concetti della meccanica quantistica e della relatività ristretta, e descrivendo le proprietà quantistiche di particelle elementari come gli elettroni, i protoni, i neutrini e i quark. L'analisi dell'equazione di Dirac consentì di spiegare con eleganza alcune delle proprietà più elusive delle particelle, come lo *spin*, e fornì una base solida al cosiddetto «principio di esclusione» di Pauli, senza il quale non era possibile spiegare la struttura atomica e la tavola periodica. L'equazione, infine, prevede l'esistenza dell'antimateria: il fatto, cioè, che per ogni «specie» di particella ne esiste un'altra con proprietà opposte (come la carica) ma con la stessa massa.

Nonostante il suo enorme successo, l'equazione di Schrödinger aveva un grave difetto: non era compatibile con la relatività ristretta. Lo si può vedere dal fatto che, nell'equazione, spazio e tempo non sono trattati sullo stesso piano: a una derivata prima rispetto al tempo, corrisponde una derivata seconda rispetto alle coordinate spaziali. Dirac risolse il problema con l'equazione che oggi porta il suo nome. L'equazione di Dirac ha una struttura matematica piuttosto complessa, mascherata, almeno in parte, dalla notazione compatta; perciò è meglio spendere un po' di tempo sulla notazione utilizzata. C'è un indice μ che può assumere i valori 0, 1, 2 o 3, a indicare il tempo e le componenti spaziali, che quindi vengono trattate allo stesso modo. I quattro campi A_μ , i cosiddetti «potenziali elettromagnetici», descrivono il campo elettromagnetico in cui si muove (ad esempio) l'elettrone, m_e è la massa di quest'ultimo. Il campo dell'elettrone è descritto da una funzione a quattro componenti, Ψ . Le cosiddette

L'elettrone relativistico

L'equazione di Dirac

Paul Adrien Maurice Dirac

Paul Adrien Maurice Dirac nacque l'8 agosto 1902 in Inghilterra, da padre svizzero e madre inglese. Dopo aver studiato Ingegneria elettrica e Matematica a Bristol, entrò al St. John's College, a Cambridge, dove nel 1926 ottenne il dottorato in Matematica. L'anno seguente, il St. John's lo accolse tra i suoi membri; nel 1930 entrò a far parte della Royal Society e nel 1932 ebbe la cattedra Lucasiana di matematica, a Cambridge. Nel 1933 condivise il Nobel per la fisica con Schrödinger. Nel 1971 andò a insegnare alla Florida State University. Morì nel 1984.

$$\left\{ \gamma^\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e A_\mu \right) - m_e \right\} \Psi(x^\nu) = 0$$

«matrici gamma», γ^μ , sono quattro matrici numeriche (cioè tabelle 4×4 formate esclusivamente da numeri) che vanno moltiplicate secondo regole matematiche ben definite con le componenti di Ψ (in realtà abbiamo fatto sparire da Ψ un altro indice, per evitare che la notazione si appesantisse ulteriormente).

Dall'analisi dell'equazione risultò chiaro il significato delle quattro componenti del campo di Dirac. Quest'ultimo include la descrizione di una proprietà alquanto misteriosa, lo *spin*, che possiamo interpretare come un grado di libertà rotazionale intrinseco. Potremmo dire che l'elettrone è l'equivalente quantistico di una piccolissima trottola – che può girare in senso orario o in senso antiorario.

Si scoprì poi che l'equazione aveva una proprietà molto interessante: consentiva di descrivere non solo le due componenti dello spin di un elettrone, ma anche i due stati di spin di un'altra particella, dotata della stessa massa dell'elettrone ma di carica opposta (positiva). È per questo che la particella fu battezzata *positrone*. Nel 1932, C.D. Anderson diede la prima dimostrazione sperimentale dell'esistenza di un'«antiparticella». Con il passar del tempo fu chiaro che tutte le particelle esistenti in natura, in realtà, hanno un'antiparticella, dotata di proprietà opposte a quelle della particella, cosicché quando una particella e la sua antiparticella si incontrano, la coppia può annichilarsi, convertendosi in energia pura sotto forma di radiazione elettromagnetica – un esempio drammatico della validità di $E = mc^2$. Più che un vettore, l'entità a quattro componenti Ψ è uno *spinore*, a causa delle particolari proprietà di spin.

Un'analisi più approfondita dell'equazione di Dirac consentì inoltre di dare una spiegazione del *principio di esclusione* di Pauli. Il principio, valido per gli elettroni e per tutte le particelle descritte da un'equazione come quella di Dirac, afferma che non è possibile che due o più di tali particelle possano mai coesistere nello stesso stato. Fino a quel

Si racconta che Dirac detestasse mostrarsi in pubblico e che fosse un uomo di poche parole. Il suo libro sulla meccanica quantistica, tuttavia, è uno dei più eleganti che siano mai stati scritti sull'argomento. C'è una sua frase che potrebbe riassumere questi tratti della sua personalità: «A scuola mi è stato insegnato che non bisogna mai cominciare una frase se non si sa come finirla».

I campi quantistici

Nella fisica classica abbiamo a che fare con particelle, forze e onde. La teoria dei quanti ci ha fatto scoprire che, in un modo o nell'altro, i concetti classici – tra loro diversissimi – di particella e di onda si unificano, nel senso che dimostrano di essere complementari. Nella teoria di campo quantistica, alla rappresentazione quantistica si aggiunge la relatività ristretta, il che significa che occorre integrare nella teoria l'equivalenza tra la massa e l'energia. E così accade: gli stati di una teoria di campo quantistica sono stati a molte particelle che descrivono diversi tipi di particelle, ognuno dei quali soddisfa la relazione di Einstein tra l'energia, la massa e la quantità di moto. I campi quantistici possono essere utilizzati per creare o annichilare particelle, così da tener conto delle interazioni. È un linguaggio in cui tutte le particelle e le forze sono descritte allo stesso livello, cioè come quanti dei corrispondenti campi quantistici.

momento si era trattato di un ingrediente fondamentale ma *ad hoc* della teoria quantistica, indispensabile per spiegare la tavola periodica degli elementi. Non potendo occupare tutti lo stesso stato di minima energia, infatti, gli elettroni di un atomo devono riempire sistematicamente i livelli energetici superiori, facendo sì che atomi di tipo diverso abbiano un comportamento chimico completamente diverso.

L'elettrodinamica quantistica

Se uniamo l'equazione di Dirac alle equazioni di Maxwell, otteniamo l'elettrodinamica quantistica (QED, Quantum Electrodynamics), cioè la teoria quantistica degli elettroni, dei positroni e dei fotoni. La teoria fu portata a termine dopo la Seconda guerra mondiale dai fisici americani Richard Feynman e Julian Schwinger, e dal giapponese Shin-ichiro Tomonaga. La sua validità è stata verificata con grandissima accuratezza, ad esempio attraverso una serie di misure di alta precisione dei momenti magnetici dell'elettrone e di un'altra particella, il *muone*. L'elettrodinamica quantistica ha rappresentato il prototipo di quella che oggi chiamiamo *teoria di campo quantistica*, e costituisce il sistema di riferimento all'interno del quale formuliamo oggi la dinamica relativistica delle particelle elementari e delle forze fondamentali. È una teoria capace di descrivere molto bene le proprietà fondamentali della natura.

È interessante notare come, nell'ambito del sistema di riferimento appena citato, venga meno la distinzione tra le forze e le particelle ad esse soggette: i campi quantistici descrivono entrambe. Una forza viene descritta come lo scambio di una particella intermedia che la «trasporta»: nel caso dell'elettromagnetismo abbiamo il fotone, che ben conosciamo. Lo sviluppo di una teoria di campo quantistica era indispensabile per sperare di riuscire a trattare tutte le interazioni fondamentali presenti in natura in una prospettiva unificata.

Attualmente, in natura, conosciamo quattro forze fondamentali. Abbiamo già incontrato la gravità e l'elettromagnetismo, poiché si manifestano direttamente nel mondo macroscopico, e ne abbiamo esaminato le equazioni fondamentali. A un certo punto, però, ci si rese conto che queste due forze, da sole, non erano in grado di spiegare certi fenomeni. Si era scoperto, ad esempio, che i nuclei atomici sono formati da elementi più piccoli, i *neutroni* e i *protoni*, e che questi ultimi erano carichi positivamente. Ci si chiese, quindi, come fosse possibile che tutte queste cariche positive riuscissero a convivere pacificamente nel nucleo, dal momento che cariche uguali si respingono. Come mai il nucleo non va in pezzi? La risposta era semplice: c'è una forza più forte di quella elettromagnetica – il suo nome esatto è *interazione forte* – che tiene unito il nucleo e che agisce nello stesso modo sui protoni e sui neutroni. La teoria che la descrive si chiama cromodinamica quantistica (QCD, Quantum Chromodynamics). Negli anni '70 si scoprì che gli stessi protoni e neutroni sono particelle composte, contenenti ognuna tre quark. Non si è mai riusciti a osservare un quark allo stato libero: i quark, a quanto pare, sono sempre legati gli uni agli altri, e sono condannati a restare confinati all'interno degli *adroni*, una famiglia di particelle che comprende il protone e il neutrone. I quark sono soggetti alla forza forte perché trasportano una sorta di carica chiamata «colore» (che però non ha nulla a che vedere con i colori di tutti i giorni), che li tiene saldamente legati all'interno degli adroni.

La cromodinamica quantistica descrive il comportamento dei quark e dell'interazione forte. Quest'ultima è mediata da particelle chiamate *gluoni* (da «glue», «colla»), poiché «incollano» tra di loro i quark, dando origine a particelle composte prive di colore, gli adroni. Questi

L'interazione forte

La cromodinamica quantistica

Un po' di storia

L'ipotesi dei *quark* fu avanzata per la prima volta nel 1960 da Murray Gell-Mann e George Zweig, ma ci vollero dieci anni per arrivare alla formulazione della cromodinamica quantistica come teoria delle interazioni forti, capace di spiegare il modo in cui i quark si legano per formare i protoni e i neutroni. I primi tentativi in tal senso furono compiuti da Yoichiro Nambu e da Murray Gell-Mann insieme ad Harald Fritzsch, servendosi di equazioni che erano state introdotte nel 1954 da Yang e Mills in un altro contesto. Di importanza fondamentale per il successo della teoria e delle sue predizioni fu la scoperta della libertà asintotica – la proprietà per cui l'interazione forte è più debole a corte distanze. Il premio Nobel per la Fisica del 2004 è stato assegnato a David Gross, David Politzer e Frank Wilczek proprio per questa scoperta. Sulla libertà asintotica si basano molti tentativi di unificare ulteriormente la descrizione delle interazioni fondamentali.

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \sum_f \bar{\Psi}_f (i\not{D} - M + g_s \not{A}^a T_a) \Psi_f$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$$

ultimi, inoltre, interagiscono tra loro attraverso una componente residua dell'interazione forte, responsabile, ad esempio, del fatto che i protoni e i neutroni si legano tra di loro per formare il nucleo. La situazione è molto simile a quella della fisica atomica, dove la forza elettromagnetica, oltre a tenere uniti i singoli atomi, è anche responsabile delle interazioni che portano gli atomi a legarsi tra di loro per formare molecole o altre strutture, come i cristalli. Gli elettroni, a differenza dei quark, non portano colore e quindi non sono sensibili all'interazione forte. Ecco perché non sono confinati.

Le proprietà della cromodinamica quantistica sono definite in maniera completa dalla prima delle due formule. La seconda equazione definisce i campi di colore F in termini dei potenziali A . Le formule sono notevoli per bellezza e semplicità: quest'ultima, però, è solo apparente, ed è dovuta a una particolare simmetria matematica, la cosiddetta «simmetria di gauge», che si nasconde nella formulazione della teoria. Riassumiamo velocemente alcune delle caratteristiche principali dell'espressione, senza entrare troppo nei dettagli. Il primo termine, quadratico in F , descrive i gluoni (associati all'indice a) e le interazioni forti tra questi. Mentre la forza elettromagnetica è trasmessa da un solo tipo di particella, il fotone, nella cromodinamica quantistica abbiamo a che fare con otto particelle diverse, i gluoni. I gluoni obbediscono a un sistema di equazioni note come equazioni di Yang-Mills, formulate per la prima volta da Chen Ning Yang e Robert Mills nel 1954 in un contesto diverso. Si tratta di una generalizzazione molto elegante delle equazioni di Maxwell, che sfrutta il principio di simmetria noto come invarianza locale di gauge. L'eleganza delle equazioni, purtroppo, non è tutto: le cose sono rese particolarmente difficili dal fatto che gli stessi gluoni trasportano una carica di colore che li porta a interagire tra di loro e a rimanere confinati come i quark.

Il secondo termine, quello con i due campi Ψ , descrive i sei diversi tipi di quark (associati all'indice f , visto che spesso vengono chiamati fla-

La lagrangiana

Com'è possibile descrivere le caratteristiche di un'intera teoria con una sola formula? L è detta *lagrangiana*, dal nome del suo creatore, Joseph-Louis Lagrange. È una funzione dei campi intimamente connessa all'espressione dell'energia. Di solito definiamo l'energia totale E come la somma di un termine cinetico (legato al moto) e un termine potenziale; la funzione L è la differenza tra la parte cinetica e quella potenziale. Le ragioni che portano a descrivere la teoria attraverso questa funzione sono le sue simmetrie intrinseche e la sua essenzialità – un aspetto non trascurabile, dato che le teorie con cui abbiamo a che fare sono sempre più complicate. Dalla funzione L si possono derivare direttamente tutte le equazioni accoppiate cui devono obbedire i vari campi, comprese le loro interazioni. Avremmo potuto scrivere anche la lagrangiana per l'elettrodinamica quantistica, specificando per i campi elettromagnetici sia le equazioni di Maxwell che quelle di Dirac.

La libertà asintotica

Per capire la libertà asintotica possiamo servirci di un'analogia. È un fenomeno simile a ciò che capiterebbe alla forza con cui la Terra attira un corpo dotato di massa, nel caso in cui quest'ultimo si muovesse attraverso la Terra, diretto al centro. Si può dimostrare che quando il corpo si trova a una certa distanza dal centro, i contributi alla forza centrale verranno solo dalla massa della parte del pianeta racchiusa nella sfera che ha per raggio proprio quella distanza. Man mano che ci si avvicina al centro, quindi, la «massa effettiva» della Terra diminuirà, e l'intensità dell'attrazione gravitazionale tenderà a zero. Analogamente, a piccole distanze, l'interazione forte diminuisce e i quark si comportano come particelle libere. Grazie alla libertà asintotica è stato possibile effettuare predizioni che sono state successivamente confermate con grande precisione dagli esperimenti realizzati presso i più grandi acceleratori di tutto il mondo.

vors, «saporii»), e contiene una parte ove compaiono i campi A^a , che definiscono le interazioni dei quark con i gluoni. Le equazioni dei quark sono come le equazioni di Dirac, con la differenza che, al posto del campo dell'elettrone, troviamo i campi dei quark e al posto del campo fotonico i campi dei gluoni. L'apparente somiglianza tra le due teorie non è un caso: riflette una proprietà universale delle forze presenti in natura. Le interazioni dei gluoni tra di loro, tuttavia, seguono una dinamica complessa, che complica a sua volta la dinamica combinata dei quark e dei gluoni – e quindi delle particelle nucleari – rendendola difficile da estrarre dalla teoria.

Esiste una proprietà miracolosa, tuttavia, che finisce per darci una mano nel tentativo di capire alcuni aspetti cruciali delle interazioni forti. È la *libertà asintotica*. Se esaminiamo cosa succede all'interno del protone, concentrando su ciò che capita all'interazione forte quando la distanza tra i quark è sempre più piccola, scopriamo che la forza associata alle cariche di colore diventa sempre più debole. La ragione di un simile fenomeno, in sostanza, sta nel fatto che dal momento che i gluoni stessi trasportano una carica di colore, la carica presente su un quark, di fatto, si distribuisce sulla nuvola di gluoni che circonda il quark. Ora, come possiamo definire l'intensità di questa forza? È forte o è debole, o entrambe le cose? La forza dell'interazione gravitazionale è definita dalla costante di Newton, mentre nel caso della forza elettromagnetica entra in gioco la carica elettrica elementare; ma cosa possiamo dire della costante di accoppiamento g , dell'interazione forte? Quello che si deve fare è specificarne il valore a una certa scala – una scala di lunghezza, di energia o di massa (sono tutte quantità legate tra loro dalle costanti universali c e $\hbar$). Potremmo dire che la scala alla quale l'intensità dell'interazione diventa importante (diciamo dell'ordine dell'unità) definisce la scala della fisica della teoria. In questo caso, la scala corrisponde alla massa del protone m_p . Ed è per questo che la massa del protone è stata inserita nella lista delle particelle fondamentali.

L'ultima delle quattro forze conosciute è la *forza debole*, responsabile di alcuni processi di disintegrazione noti come *decadimenti beta*: un neutrone del nucleo decade dando origine a un protone, un elettrone e un antineutrino. Il nucleo acquisisce un'unità di carica, salendo di un posto nella tavola periodica, ed emette l'elettrone e l'antineutrino. Questi processi svolsero un ruolo cruciale nella scoperta di quella particella sfuggente che è il neutrino.

La forza debole agisce sui quark, nonché sugli elettroni, sui neutrini e sulle particelle simili. Un particolare molto importante è il fatto che la teoria, nella sua forma consistente, include anche le interazioni elettromagnetiche. Il matrimonio tra le due interazioni è stato un po' forzato, ma si è rivelato molto felice. La teoria elettrodebole prevede che le interazioni siano mediate da quattro particelle; di queste, tre hanno a che fare con la forza debole (e vengono indicate di solito con W^+ , W^- e Z), mentre la quarta (il fotone, che si indica con γ) è associata all'elettromagnetismo.

L'espressione che definisce la teoria sembra terribilmente complicata, ma in realtà non ci vuole molto per riconoscere la stessa struttura generale che abbiamo visto negli esempi precedenti. La lagrangiana totale $\mathcal{L}_{EW}$ è composta da quattro termini. Il primo, $\mathcal{L}_g$, descrive le particelle che mediano la forza e le interazioni tra di loro (in maniera totalmente analoga al termine quadratico F dei gluoni nell'equazione dell'interazione forte). Il secondo termine, $\mathcal{L}_f$, descrive tutte le particelle «di tipo Dirac» e le loro interazioni con le particelle-forza. L'indice i permette di distinguere tra le varie famiglie di particelle – elettroni, quark di diverso sapore, neutrini, eccetera.

Le interazioni elettrodeboli

Il modello di Glashow-Weinberg-Salam

Un po' di storia

La teoria elettrodebole fu proposta nel 1968 da Sheldon Glashow, Steven Weinberg e Abdus Salam, ma le sue predizioni poterono essere verificate dagli esperimenti nei grandi acceleratori solo molti anni dopo. Nel 1979, gli autori della teoria ricevettero il premio Nobel per il loro lavoro teorico. La particella W fu scoperta al CERN da Carlo Rubbia e Simon van der Meer, che per questo ricevettero il Nobel nel 1984. Gerard 't Hooft e da Martinus Veltman dimostrarono la consistenza matematica della teoria e svilupparono alcuni strumenti di calcolo fondamentali, rendendo possibile una serie di previsioni molto precise che sono state poi confermate dagli esperimenti effettuati presso i grandi acceleratori di tutto il mondo. Nel 1999, 't Hooft e Veltman hanno ricevuto il premio Nobel.

$$\mathcal{L}_{E-W} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_m$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_f = \sum_i \bar{\Psi}_{Li} (i\not{\partial} + g' W^a t_a + g \not{B} y) \Psi_{Li} + \sum_i \bar{\Psi}_{Ri} (i\not{\partial} + g \not{B} y) \Psi_{Ri}$$

$$\mathcal{L}_H = - (D_\nu \phi)^\dagger (D^\nu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger \phi) + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

$$\mathcal{L}_m = - \sum_{i,j} (c_{ij} \bar{\Psi}_{Li} \phi \Psi'_{Rj})$$

C'è un dettaglio molto importante da sottolineare, e riguarda il fatto che le interazioni deboli si comportano in maniera diversa con la componente di spin sinistrorsa (L) e con quella destrorsa (R) delle particelle di tipo Dirac. In altre parole: la natura preferisce la materia sinistrorsa, infrangendo così la simmetria speculare a un livello fondamentale. Significa che se un certo processo può avvenire, non è detto che possa avvenire anche la sua immagine speculare.

Nella tabella del Modello Standard che potete vedere qui a fianco, osserviamo che ci sono i quark (in tre colori) e sei tipi di leptoni. I sei tipi di quark (*up, down, charm, strange, top e bottom*) corrispondono ai «sapori» (*flavors*) che abbiamo visto in precedenza. I sei leptoni sono disposti in due colonne: quella di sinistra contiene l'elettrone e le sue copie più pesanti, mentre nella colonna di destra troviamo i *neutrini* corrispondenti.

Messa così, nonostante il numero dei componenti fondamentali della materia si sia ridotto notevolmente, sembra che ci siano ancora un sacco di nomi buttati lì per fare bella figura. La materia ordinaria, tuttavia, è praticamente tutta composta da particelle della prima riga (quark up e down ed elettroni). Le tre righe sono considerate come le tre famiglie delle particelle elementari e hanno molte proprietà in comune – a parte la massa, che cresce da una riga all'altra. Le interazioni deboli consentono alle particelle delle famiglie più pesanti di decadere in quelle delle famiglie più leggere e, in particolare, in quelle della prima riga, che formano tutta la materia stabile presente nel nostro Universo. Le transizioni tra particelle elementari provocate dall'interazione debole sono alla base di ciò che osserviamo come decadimenti radioattivi dei nuclei. Questi decadimenti determinano l'intensità della forza debole, legandola, in sostanza, alla scala di massa delle particelle W .

IL MODELLO STANDARD					
Mediatori della forza				Higgs	
g	γ	$W^\pm$	z	Φ	
Quarks			Leptoni		
u	d		e	ν_e	
c	s		γ	ν_μ	
t	b		τ	ν_τ	

Il terzo termine della lagrangiana è la parte scalare L_{H} , che descrive un'ulteriore particella di cui ha bisogno la teoria: il cosiddetto bosone di Higgs, indispensabile per dotare di massa la maggior parte delle altre particelle. Il bosone di Higgs non è stato ancora osservato, ma ci si aspetta di scoprirlo con l'entrata in funzione del Large Hadron Collider, un grande acceleratore al CERN di Ginevra. Il campo di Higgs è molto importante, perché, in un certo senso, spiega l'origine della massa. È sempre presente, come una sorta di fondo costante nel quale devono muoversi le altre particelle, che così facendo acquistano massa. La massa delle particelle di Dirac deriva dalle interazioni con l'ultimo componente, L_{H} .

Nonostante tutte le complicazioni e le sfumature, è bello vedere le somiglianze tra le teorie che descrivono la forza debole, quella elettromagnetica e quella forte, in particolar modo il fatto che alla base di tutto ci sia un unico principio di simmetria di gauge. La teoria combinata di queste tre forze è detta Modello Standard delle particelle elementari. La tabella qui a fianco ne riassume tutti gli ingredienti. Possiamo considerarla come la versione moderna del sistema periodico delle particelle elementari, un passo avanti radicale rispetto alla cara, vecchia tavola di Mendeleev che abbiamo visto tutti appesa alle pareti delle nostre aule di liceo. È paradossale come sia stata proprio la strada del riduzionismo più intransigente a portarci a una visione così unitaria di tutta la natura.

Finora abbiamo identificato quattro forze fondamentali: il Modello Standard ne descrive tre, mentre la gravitazione è descritta dalla relatività generale. Il Modello Standard è una teoria quantistica, mentre la relatività generale non lo è. Dopo tutti questi successi nella ricerca di una descrizione unificata delle particelle e delle forze, è comprensibile che ci siano grandi speranze di arrivare a una teoria universale della natura, che comprenda anche una teoria quantistica della gravità. È il Santo Graal della fisica fondamentale.

Per ora, il tentativo più ambizioso in tale direzione è la teoria delle stringhe, in cui i componenti fondamentali della materia, insieme a tutte le loro interazioni, sono manifestazioni di una dinamica ancora più fondamentale, che ha per protagoniste le stringhe. Le stringhe sono così piccole che è difficile pensare di riuscire mai a osservarne una in maniera diretta. La credibilità della teoria può essere dimostrata solo per via indiretta. Le previsioni (o risultati, se preferite) della teoria includono l'esistenza di un partner supersimmetrico per ogni particella elementare e la possibilità che le dimensioni fondamentali dell'Universo siano dieci o undici. Non è ancora chiaro, però, a che scala debbano cominciare a manifestarsi tutte queste caratteristiche.

I tentativi di formulare una teoria di campo unificata risalgono ad Einstein, che vi dedicò gli ultimi anni di vita. Col passare degli anni gli sforzi si sono accumulati, con fortune alterne. Ne sono un esempio le Teorie di Grande Unificazione (GUT, Grand Unified Theories), che cercano di unificare le interazioni elettromagnetiche, deboli e forti in un unico modello dotato di un elevato grado di simmetria. Tali teorie, ad esempio, spiegano un dato sperimentale molto semplice, mai spiegato prima da nessuna teoria, vale a dire il fatto che

La teoria delle stringhe

L'azione della superstringa

Un po' di storia

La teoria delle stringhe vide la luce nei primi anni '60 come possibile teoria delle interazioni forti, ma fu abbandonata con l'arrivo della cromodinamica quantistica. Si capì quale fosse la sua vera vocazione nel 1983, quando venne proposta come teoria della gravità quantistica e, di fatto, come teoria di tutte le interazioni e di tutte le particelle. Le persone che hanno apportato contributi fondamentali sono numerose: tra tutte, citeremo John Sherk e John Schwarz (per gli sviluppi iniziali), Michael Green e Alexander Polyakov. Edward Witten, che occupa attualmente quella che fu la cattedra di Einstein all'Institute for Advanced Study di Princeton, ha contribuito in maniera decisiva al formalismo matematico della teoria così come alla sua interpretazione. Non c'è da meravigliarsi se la teoria delle stringhe, con la sua ambizione onnicomprensiva, attrae tanti giovani talenti della ricerca da tutto il mondo.

$$\mathcal{L}_S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{|g|} \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi \right)$$

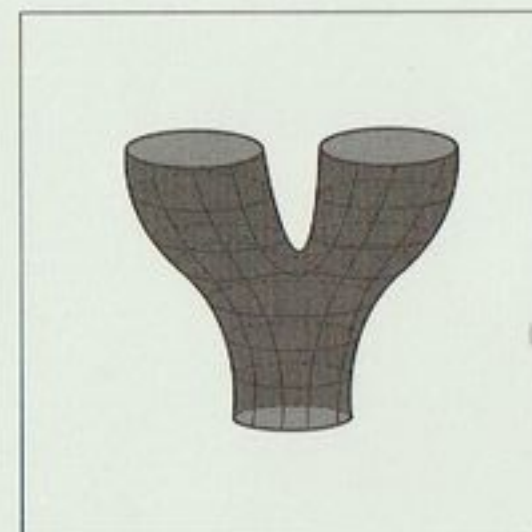
l'elettrone e il protone hanno carica elettrica uguale ma di segno opposto. Un'altra predizione, abbastanza generale, riguarda la possibilità che il protone decada (molto raramente, a dire il vero) in particelle più leggere, il che implicherebbe che tutta la materia, prima o poi, è destinata all'instabilità. Per fortuna, la vita media del protone è maggiore di 10^{32} anni. Non c'è dubbio, comunque, che non appena si osserverà un decadimento del genere, la credibilità delle teorie GUT aumenterà notevolmente.

Chi aveva tentato di costruire una teoria unificata partendo dalla gravitazione si rese conto che i metodi della teoria quantistica, capaci di descrivere con successo le altre interazioni in chiave quantistica, fallivano miseramente quando venivano applicati alla relatività generale. Cominciò a diffondersi la sgradevole sensazione che forse sarebbe stato necessario sostituire la teoria di Einstein, o quantomeno generalizzarla in maniera da renderla consistente con i postulati quantistici. La necessità di una teoria del genere balza agli occhi se si considerano sistemi fisici in condizioni estreme, la cui scala caratteristica è definita dalle costanti universali associate ai vari domini della fisica che si vogliono unificare: la gravitazione (G), la relatività (c) e la teoria dei quanti ($\hbar$). Le situazioni tipiche in cui si verificano tali condizioni sono le fasi iniziali del Big Bang e quelle finali dell'evaporazione di un buco nero.

La supergravità ha rappresentato un primo tentativo, ambizioso e promettente, di rivedere la teoria di Einstein cercando di colmare il divario che la separa dalle altre teorie. Nella supergravità si trasforma lo spazio in un superspazio dotato di una supersimmetria fondamentale. La supersimmetria richiede che ogni tipo di particella abbia il proprio superpartner: finora nessun esperimento ne ha mai osservati, ma non è detto che prima o poi non ci si ritrovi a discutere una causa di superseparazione.

La struttura fondamentale dello spazio e del tempo

Cosa significa che lo spazio-tempo è composto da stringhe? Lo spazio-tempo è una manifestazione collettiva delle stringhe, un effetto di fondo tipico dei modi della stringa che possono essere interpretati come «gravitoni» di massa nulla. In quanto tale, nell'ambito della teoria delle stringhe, lo spazio-tempo assume un carattere di fenomeno emergente: al di là di una certa scala, la nozione di spazio-tempo perde significato, e per sapere cosa succede realmente bisogna studiare direttamente le stringhe. È come cercare di capire come si comporta l'acqua su scala sempre più piccola: a un certo punto ci si ritrova a studiare le singole molecole, le cui proprietà sono diverse da quelle del sistema collettivo che chiamiamo acqua. Al di là di una certa scala, quindi, è probabile che non abbia più senso parlare di spazio-tempo.



La candidata più generale e forse più forte al ruolo di «teoria del tutto» è la teoria delle superstringhe. Il suo postulato fondamentale afferma che le entità fondamentali, in natura, non siano particelle puntiformi, bensì piccolissime stringhe unidimensionali, le cui dimensioni caratteristiche sono dell'ordine di 10^{-35} m. Secondo la teoria delle stringhe, ogni particella elementare corrisponde a un particolare modo vibrazionale della superstringa. Per dare il giusto rilievo alle dimensioni ridotte delle superstringhe, basta osservare come gli acceleratori più potenti non ci consentano di scendere al di sotto di 10^{-20} m: perciò non abbiamo speranze di verificare direttamente la validità dell'ipotesi delle stringhe. Gli scienziati stanno cercando di esprimere la teoria in una forma abbastanza corretta da dare origine a predizioni falsificabili che ne dimostrino indirettamente la validità. Il punto di partenza è abbastanza semplice: si postula che, in natura, le entità fondamentali sono le stringhe; si scrive un'espressione che ne descriva l'energia – o la funzione lagrangiana corrispondente – dopo di che si applicano i principi quantistici e si sta a vedere quale tipo di fisica si ottiene. I risultati interessanti non tardano a venire. Gli stati più bassi corrispondono alle particelle prive di massa, tra cui il gravitone, il quanto dell'interazione gravitazionale. Si può persino far derivare la teoria di Einstein da un'approssimazione della teoria delle stringhe a bassa energia e a grandi distanze. Inoltre si ritrovano le famiglie di particelle e le interazioni tipiche del Modello Standard. Purtroppo ci si è ritrovati tra le mani anche un'altra proprietà della teoria, inevitabile e decisamente imprevedibile: le dimensioni dello spazio-tempo non sono le nostre care e vecchie quattro, bensì dieci! Per accomodare il nostro mondo nella teoria, quindi, sei dimensioni su dieci devono sparire, o per lo meno diventare invisibili. Sei dimensioni devono «arrotolarsi» come un tappeto, rimpicciolendosi a tal punto da non poter più essere osservate. La teoria non ci dice come possa

accadere tutto questo. Sembra che i modi per riuscirci siano numerosi, ma ognuno di loro ha vantaggi e svantaggi.

La speranza è che questa teoria riesca a stabilire una correlazione quantitativa tra le quantità osservate sperimentalmente – permettendo, ad esempio, di calcolare le masse delle particelle o le intensità delle forze – ma si tratta di un compito arduo, data l'enorme differenza di scala tra i parametri accessibili sperimentalmente e la scala tipica delle stringhe.

La formula che abbiamo presentato definisce la teoria delle stringhe. Il primo termine, in pratica, ci dà l'area della superficie (la cosiddetta «superficie di Universo») descritta da una stringa che si muove attraverso lo spazio-tempo. Tale superficie può essere chiusa o aperta: in quest'ultimo caso, i bordi sono linee chiuse, interpretabili come stringhe entranti o uscenti. In questa interpretazione geometrica, come si può vedere nella figura di pagina 91, le interazioni tra le stringhe sono già incluse. Da un altro punto di vista, la teoria delle stringhe può essere vista, in un certo senso, come una teoria di campo bidimensionale definita sulla «superficie di Universo» e i cui campi sono costituiti dalle coordinate spazio-temporali. Così facendo, in effetti, si ottiene la quantizzazione dello spazio-tempo in maniera estremamente diretta e inattesa.

Il secondo termine della lagrangiana di stringa contiene dei campi di tipo Dirac; anche questi si propagano sulla superficie di Universo, e sono necessari per implementare la supersimmetria: questa, a sua volta, è fondamentale per garantire la consistenza globale della teoria.

Concludiamo osservando che le equazioni della teoria delle stringhe non hanno lo stesso rango di gran parte delle altre equazioni presentate nel corso di questo libro, ma che, a detta di molti, sarà proprio la teoria delle stringhe a imporsi come paradigma globale della natura.

Le brane e la teoria M

Ci sono due varietà principali di stringhe: quelle aperte e quelle chiuse. Le stringhe chiuse descrivono la gravità, mentre quelle aperte sono associate spesso alle altre interazioni. Nella versione moderna della teoria delle stringhe, la teoria M, non ci sono solo le stringhe, ma anche altri oggetti di dimensione più elevata, le cosiddette «p-brane». Una 1-brana è una stringa, una 2-brana è una membrana, e dunque le p-brane con $p > 2$ sono il corrispettivo multidimensionale delle membrane. La regola, adesso, è che una stringa aperta termina su una brana: in altri termini, una stringa aperta può connettere due p-brane. Rispetto alla formulazione originale della teoria, si tratta di una correzione non da poco, che però si rende necessaria per dare consistenza matematica alla teoria. L'insieme di tutti questi oggetti prende il nome di teoria M, dove la M sta per Madre, Mistero o, molto più banalmente, Matrice.

Ritorno al futuro

Una prospettiva finale

$$l_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \approx 10^{-35} \text{ m}$$

$$t_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}} \approx 10^{-43} \text{ s}$$

$$m_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \approx 10^{-8} \text{ kg}$$

Ora che abbiamo concluso il nostro viaggio un po' astratto ad alta quota, diamo un'altra occhiata alla tabella delle costanti fondamentali della natura di cui abbiamo già parlato all'inizio del libro: la trovate sul primo risvolto di copertina. Non è che un mucchio di numeri. Abbiamo optato per il sistema di unità di misura in cui la lunghezza, la massa, il tempo e la carica elettrica si misurano rispettivamente in metri, chilogrammi, secondi e Coulomb. Si tratta di unità legate intimamente alla scala dell'esperienza umana, la quale, come abbiamo avuto occasione di vedere nel corso del libro, è decisamente arbitraria rispetto alla totalità dell'Universo.

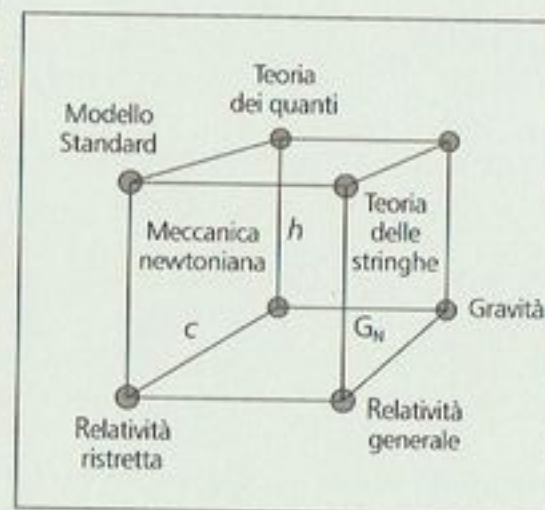
È lecito chiedersi se la natura non abbia un suo insieme di unità preferite. E se così fosse? In realtà, già nel 1900 Max Planck aveva osservato come fosse possibile utilizzare una combinazione particolare delle costanti fondamentali della natura per definire un sistema «naturale» di unità di spazio, tempo e massa che sostituisse quello tradizionale. Le unità di Planck sono definite attraverso la costante fondamentale della gravitazione (G_N), quella della relatività (c) e quella della teoria quantistica ($\hbar$), e sono dette, rispettivamente, lunghezza, tempo e massa di Planck. Troverete le loro definizioni qui a fianco. Queste unità di misura fissano la scala fondamentale codificata nei dati che estraiamo dal mondo fisico.

Per dare un'idea di insieme della fisica moderna possiamo ricorrere a un'altra immagine suggestiva: proviamo a pensare a un cubo magico, sospeso nello «spazio delle teorie» (come nella figura a pagina 94). Osservandolo attentamente, possiamo vedere la rete delle equazioni di questo libro da un punto di vista ancora diverso: si tratta di un'altra rappresentazione – tridimensionale, questa volta – della «mappa dei contenuti» presentata all'inizio del libro. Gli eventi che hanno cambiato la fisica sono situati ai vertici del cubo. Sullo spigolo inferiore della faccia posteriore, indicato dalla costante di New-

ton, troviamo quella fisica newtoniana (la meccanica e la teoria della gravitazione) che tanto ci ha tormentato al liceo. Insieme all'universalità della velocità della luce, la teoria della relatività ristretta ha aperto la porta su una dimensione nuova, rappresentata dalla faccia inferiore del cubo che esce dalla pagina. Come abbiamo già detto, però, la teoria ristretta era ancora in conflitto con la teoria newtoniana della gravitazione, e per risolvere il conflitto si è dovuta aspettare la teoria della relatività generale, che ha identificato la gravità con la curvatura dello spazio-tempo.

La rivoluzione successiva è stata quella dei quanti, legata alla costante di Planck, che ha aggiunto al nostro sistema di riferimento concettuale un'ulteriore dimensione, perpendicolare al piano definito dallo spazio-tempo e dalla gravità. Nel vertice in alto a sinistra, sullo sfondo, vive l'equazione di Schrödinger. L'angolo in alto a destra, sempre sullo sfondo, andrebbe associato a una trattazione non relativistica della forza di gravità, ma si tratta di un punto situato in una regione dello spazio dei parametri priva di interesse fisico. Possiamo pensare, ad esempio, alla trattazione quantistica del sistema Terra-Luna, o del Sistema solare: i valori dei suoi parametri caratteristici sarebbero tali da portare a un risultato assolutamente indistinguibile, sul piano sperimentale, da quello newtoniano classico.

Una volta che la teoria dei quanti è entrata a far parte della nostra vita ordinaria, ci siamo resi conto che non andava affatto d'accordo con la relatività ristretta. Il conflitto si è risolto con lo sviluppo delle teorie di campo quantistiche, come la cromodinamica quantistica e la teoria elettrodebole. Ed ecco che nel vertice in alto a sinistra della faccia anteriore del cubo troviamo, in sostanza, il Modello Standard. Possiamo vederla anche in questo modo: le nostre teorie della materia stanno sul piano verticale sinistro. Ed ecco che ci troviamo di nuovo di fronte a uno scontro: quello tra le teorie quantistiche della



Unità

Le costanti di natura hanno valori che dipendono dalle unità con cui si sceglie di lavorare. Il valore della velocità della luce, naturalmente, è diverso, a seconda che lo si esprima in miglia orarie, metri al secondo o piedi per ciclo lunare, tanto per fare degli esempi. Quando tutti usano lo stesso sistema di unità, comunque, le cose sono molto più semplici – e non importa quale sia il sistema prescelto, se è lo stesso per tutti. La comunità scientifica internazionale ha scelto di usare il sistema «metro-chilogrammo-secondo», che include il Coulomb come unità fondamentale di carica elettrica e il Kelvin come unità di temperatura. La definizione di queste costanti è legata alla conoscenza di quantità misurabili con grande precisione, e quindi è destinata a variare nel tempo, in funzione dei progressi in campo sperimentale.

materia, da un lato, e la teoria geometrica einsteiniana dello spazio-tempo e della gravità dall'altro. Il terreno di battaglia coincide approssimativamente con il dominio associato alla scala di Planck, inaccessibile, quindi, all'indagine sperimentale diretta. La speranza è che la teoria delle stringhe finisca per risolvere il conflitto che si cela nelle profondità dell'esperienza di tutti i giorni; la teoria delle stringhe è una teoria quantistica dello spazio-tempo.

Che dire delle altre costanti fondamentali? Che cosa esprimono e che cosa racchiudono? Abbiamo incontrato quattro forze fondamentali, e ora ci è chiaro che l'intensità di ognuna di loro, in un certo senso, definisce la scala caratteristica scelta dalla natura per organizzarsi. Nel caso della gravità, la costante è quella di Newton. Se la traduciamo in termini di energia, otteniamo la massa di Planck che, come abbiamo visto, definisce la scala fondamentale delle stringhe. La costante di accoppiamento elettromagnetica e definisce la scala energetica caratteristica della fisica atomica, che determina l'ordine di grandezza delle differenze di energia tra i livelli atomici. Queste ultime sono proporzionali all'energia di riposo dell'elettrone, $E_e = m_e c^2$, moltiplicata per una quantità adimensionale dipendente da e (cioè il quadrato della costante di struttura fine $\alpha = e^2/2hc = 1/137,0$). La scala di massa caratteristica degli atomi è definita dalla massa del nucleo, la quale, a sua volta, è definita dalla massa del protone m_p . Quest'ultima, come si è già detto, corrisponde alla scala intrinseca dell'interazione forte: è la scala energetica alla quale l'intensità delle interazioni forti è dell'ordine dell'unità. A questo punto ci resta solo l'interazione debole, la cui scala energetica caratteristica è legata alla scala temporale dei processi di decadimento di cui tale interazione è responsabile: tali processi possono essere correlati direttamente alla massa dei bosoni intermedi W .

Se torniamo al nostro cubo, vediamo che queste costanti sono disseminate nel piano verticale sinistro, quello definito da c e da h .

Un'osservazione del genere, apparentemente casuale, può nascondere un significato inatteso e profondo, cioè che, se si prendono le unità di Planck come riferimento assoluto, gli altri parametri potrebbero non essere poi così fondamentali. Forse sono solo conseguenze dinamiche di una teoria ancora più fondamentale, come le altre costanti in cui ci siamo imbattuti – quella di Boltzmann, ad esempio, che definisce la scala delle temperature in funzione dell'energia, o il numero di Avogadro: quest'ultimo deriva dall'ipotesi – corretta – formulata intorno al 1810 da Amedeo Avogadro sul fatto che, a parità di pressione e di temperatura, il numero di particelle di gas contenute in un volume dato non dipende dalla natura del gas stesso. Le costanti universali elencate nel risvolto di copertina definiscono le scale fondamentali che caratterizzano il nostro mondo. Nel caso di alcuni mezzi possono entrare in gioco scale relative che danno origine ad altri parametri, la cui importanza è di ordine fenomenologico. Si tratta di parametri efficaci, generati in maniera dinamica dall'interazione, tutt'altro che banale, tra le leggi di natura e le costanti universali. Se mai saremo capaci di dare una conferma sperimentale alla teoria delle superstringhe, probabilmente ci ritroveremo con una sola costante fondamentale.